



Caractérisation expérimentale et modélisation multi-échelles des transferts de chaleur et de masse au sein d'isolants à structure fibreuse

Rayan El Sawalhi

► To cite this version:

Rayan El Sawalhi. Caractérisation expérimentale et modélisation multi-échelles des transferts de chaleur et de masse au sein d'isolants à structure fibreuse. Thermique [physics.class-ph]. Université de La Rochelle, 2015. Français. <NNT : 2015LAROS011>. <tel-01373400>

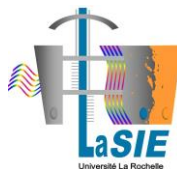
HAL Id: tel-01373400

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01373400>

Submitted on 28 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de La Rochelle – UFR Science et Technologie
Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement

*Ecole doctorale Sciences et Ingénierie en Matériau, Mécanique, Énergétique et
Aéronautique*

Thèse de doctorat en Energétique et Thermique

**CARACTERISATION EXPERIMENTALE ET MODELISATION
MULTI-ECHELLES DES TRANSFERTS DE CHALEUR ET DE
MASSE AU SEIN D'ISOLANTS A STRUCTURE FIBREUSE**

Rayan El Sawalhi

Soutenance le 28 Septembre 2015

JURY

Patrick GLOUANNEC	Professeur, Université de Bretagne-Sud, Rapporteur
Wahbi JOMAA	Professeur, Université de Bordeaux, Rapporteur
Laurent MARMORET	Maître de conférences, Université de Picardie, Examineur
Hamou SADAT	Professeur, Université de Poitiers, Examineur
Jérôme LUX	Maître de conférences, Université de La Rochelle, Co-encadrant
Patrick SALAGNAC	Professeur, Université de La Rochelle, Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Patrick Salagnac et Jérôme Lux, pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais sur la modélisation par changement d'échelle, puis pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé pendant presque quatre ans tout en me laissant une grande liberté et en me faisant l'honneur de me déléguer plusieurs responsabilités dont j'espère avoir été à la hauteur.

Je ne sais comment exprimer ma gratitude à ces deux personnes autrement qu'en leur promettant d'agir comme eux avec mes subordonnés, si un jour l'occasion m'en est donnée.

Je remercie M.Karim-Ait Mokhtar, directeur du Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement (LaSIE), pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

MM. les Profs. Wahbi Jomaa et Patrick Glouannec ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie pour leur participation au Jury ainsi que pour leurs nombreuses remarques et suggestions pour améliorer la qualité de ce mémoire.

MM Hamou Sadat et Laurent Marmoret m'ont fait l'honneur de participer au Jury de soutenance ; je les en remercie profondément.

Je passe ensuite une dédicace spéciale à tous les doctorants que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces quelques années à La Rochelle, commençant tout d'abord par les doctorants du bureau 150 A (le meilleur bureau ;) Alexandra notre « doyenne » et évidemment « comme Alex l'a dit ; », Jean Louis « le nouveau docteur avec article accepté et membre de la société internationale pour un truc solaire :P », Lisa la fille la plus gentille du monde , Malek le « gentelman » et Kevin la personne dont j'espère qu'il me considère comme une vraie amie car ces derniers trois ans il était une des personnes dont j'avais confiance en son jugement. Ensuite je remercie les autres doctorants qui sont pour moi des vrai amis à savoir Adrien pour les super gâteaux ;) sa gentillesse et vraiment son immense cœur, Serge, Thomas le président de l'ADOCs, Pierre, Brice, Antoine, Remon, Zaid, Imam, Remy, Valérien, Ahmed, Nabil et Yassine. Ainsi qu'un remerciement particulier à Laurent qui était un super ami ainsi qu'un correcteur orthographique particulièrement efficace ;) qui m'a tellement aidé à améliorer mon français sans oublier sa contribution scientifique au sein du laboratoire :p ;).

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du LaSIE, et j'en remercie ici tous les membres ainsi que tous les membres des autres laboratoires qui nous entourent.

Et bien sûr je ne peux jamais oublier la petite communauté libanaise commençant par Hassan qui m'a accueilli et aidé pour m'installer alors un super merci. De plus je ne peux pas oublier Marwan et son sourire, Saad et son humour impeccable, Nissrine alias le Commident de tous ;) Ahmad le soldat balance ;)et évidemment Mireille mon amie que je suis fière de considérer comme ma sœur. Je vous remercie tous pour ces années passées ensemble. En notant l'arrivée de Jana la petite gamine ;) à qui je souhaite un bon courage pour ses années de doctorats.

Et notamment à la fin je remercie les gens les plus proches à mon cœur, ma famille complète et spécialement mes parents qui étaient toujours là pour m'encourager et m'inciter à faire de mon mieux. J'espère que vous êtes fière de votre petite fille qui a essayé de son mieux pour pouvoir réaliser son rêve. Allah ykhalili yekon ya rab.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner les contributeurs audiovisuelles qui m'ont accompagné durant l'élaboration et surtout la rédaction de cette thèse, c'est-à-dire YouTube et Deezer.

RESUME

Ce travail de thèse porte sur le développement d'un modèle rendant compte du comportement hygrothermique d'un isolant végétal à base de fibres de chanvre d'une part et de méthodes de caractérisation à différentes échelles d'autre part. La laine de chanvre est un matériau fibreux présentant une structure complexe et anisotrope à l'échelle du réseau de fibres. Les fibres végétales qui la constituent sont en outre des matériaux fortement hygroscopiques possédant une porosité à petite échelle. Afin d'étudier cette structure complexe et multi échelles, nous avons recours à des images 2D et 3D obtenues par MEB et tomographie aux rayons X. L'utilisation d'outils d'analyse d'images issus de la morphologie mathématique permet alors de caractériser quantitativement la microstructure de la laine de chanvre (porosité, granulométrie, orientation locale, etc.). Pour décrire le transfert couplé d'humidité et de chaleur au sein de ces laines, nous avons développé un modèle macroscopique basé sur un double changement d'échelle. Le premier changement d'échelle permet d'établir les lois de comportement à l'échelle de la fibre et notamment d'obtenir les expressions des propriétés effectives des fibres en fonction de leur morphologie et de leur teneur en eau. Le second changement d'échelle nous permet quant à lui d'écrire le modèle de transferts couplés à l'échelle du matériau homogène ainsi que les expressions des propriétés effectives du matériau (conductivité thermique, diffusivité à la vapeur). Les problèmes de fermeture permettant le calcul direct des propriétés effectives sur des structures discrétisées sont également développés. Ces outils sont finalement mis en œuvre afin de calculer directement sur les images 3D la conductivité thermique, la perméabilité à la vapeur ainsi que la perméabilité de la laine de chanvre. La comparaison avec des résultats expérimentaux d'une part et les prédictions de modèles issus de la littérature d'autre part montre la pertinence et la complémentarité de l'approche développée dans ce travail.

Mots-clefs : Transfert hygrothermique, Analyse d'images, Fibre de chanvre, Conductivité thermique, Perméabilité à la vapeur, Diffusivité hydrique, Prise de moyenne, Micro tomographie, Transfert de chaleur et de masse.

ABSTRACT

This thesis focuses on the development of a model accounting hydrothermal behavior of hemp-fiber insulation on one hand and the methods of characterization at different scales on the other hand. Hemp wool is a fibrous material featuring complex and anisotropic network of fibers. The plant fibers which constitute it are strongly hygroscopic materials with small scale porosity. To study this complex and multi-scale structure, we use 2D and 3D images obtained by SEM and X-ray tomography. The use of image analysis tools from mathematical morphology allows for a quantitative characterization of the hemp wool microstructure (porosity, fiber size, local orientation, etc.). To describe the coupled transfer of moisture and heat in such wools, we have developed a macroscopic model based on a double upscaling. The first upscaling allows establishing the hygrothermal behavior of homogenized fiber and in particular we were able to obtain the expressions for the effective properties of the fibers according to their morphology and their moisture content. The second upscaling allows us to write the coupled transfer model of the homogenous material and the expressions of actual material properties (thermal conductivity, diffusivity steam). The closure problems for the direct calculation of the actual properties of discretized structures are also developed. These tools are finally implemented to calculate directly the 3D thermal conductivity, vapor permeability and the intrinsic permeability of the hemp wool. The comparison with experimental results and model predictions from the literature shows the relevance and complementarity of the approach developed in this work.

Keywords: Hygrothermal transfer, Image analysis, Hemp fibers, Thermal conductivity, Permeability, Diffusivity, Volume averaging, Micro tomography, Heat and mass transfer.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I. ÉTAT DE L'ART	3
I.1 CONTEXTE ET ENJEUX.....	5
I.2 LES FIBRES NATURELLES	5
I.2.1 Les fibres végétales : avantages et inconvénients	6
I.2.2 Applications des fibres végétales.....	6
I.3 LE CHANVRE	6
I.3.1 Généralités	6
I.3.2 Composition et transformation de la tige de chanvre	8
I.3.3 La fibre de chanvre.....	11
I.3.4 La laine de chanvre.....	16
I.4 MECANISMES DES TRANSFERTS AU SEIN DE MILIEUX POREUX.....	16
I.4.1 Les milieux poreux	16
I.4.2 Les milieux fibreux	17
I.4.3 Caractéristiques morphologiques.....	18
I.4.4 Caractéristiques hydriques.....	19
I.4.5 Caractéristiques thermiques	27
I.5 MODELISATION DES TRANSFERTS AU SEIN DE MILIEUX POREUX	28
I.6 CONCLUSION.....	34
CHAPITRE II. CARACTERISATION DE LA STRUCTURE PAR ANALYSE D'IMAGES	37
II.1 INTRODUCTION	39
II.2 TECHNIQUES DE CARACTERISATION DES MILIEUX POREUX.....	39
II.3 ACQUISITION ET TRAITEMENT DES IMAGES.....	40
II.3.1 Microscopie électronique à balayage	40
II.3.2 Élément d'analyse d'images	44
II.3.3 Tomographie X	46
II.3.4 Volume élémentaire représentatif.....	49
II.4 RESULTATS	52
II.4.2 Diamètre des fibres et distribution des pores	53
II.4.3 Identification et acquisition des phases	55
II.4.4 Auto corrélation.....	59
II.4.5 Orientation locale des fibres.....	60
II.5 CONCLUSION.....	62
CHAPITRE III. MODELISATION MULTI-ECHELLE DES TRANSFERTS COUPLES DE MASSE ET DE CHALEUR	65
III.1 INTRODUCTION	67
III.2 OUTILS MATHÉMATIQUES DE CHANGEMENT D'ECHELLE.....	67
III.2.1 Notion de séparation des échelles et de Volume Élémentaire Représentatif.....	69
III.2.2 Définition des moyennes	70
III.2.3 Théorèmes de prise de moyenne	70
III.2.4 Décomposition en déviation	71
III.2.5 Formulation locale	71
III.2.6 Synthèse de la méthode de prise de moyenne	72

III.3	MODELISATION DES TRANSFERTS COUPLES DE CHALEUR ET DE MASSE A L'ECHELLE DE LA FIBRE.....	73
III.3.1	Définition du problème à l'échelle microscopique	73
III.3.2	Homogénéisation des fibres	78
III.4	FERMETURE A L'ECHELLE DE LA FIBRE.....	87
III.4.1	Conservation de l'énergie.....	87
III.4.2	Conservation de la masse de vapeur	89
III.4.3	Conditions aux limites	89
III.4.4	Variables de fermetures	92
III.4.5	Problèmes de fermetures.....	92
III.5	EQUATIONS FERMEES A L'ECHELLE DE LA FIBRE	101
III.5.1	Taux de changement de phase	101
III.5.2	Conservation de la masse.....	104
III.5.3	Conservation de l'énergie.....	106
III.6	EQUATIONS A L'ECHELLE DU RESEAU DE FIBRES.....	109
III.6.1	Conservation de l'énergie.....	109
III.6.2	Conservation de la masse.....	111
III.6.3	Conditions aux limites	111
III.7	EQUATIONS MACROSCOPIQUES (ECHELLE DU MATERIAU)	113
III.7.1	Conservation de l'énergie.....	113
III.7.2	Conservation de la masse.....	118
III.8	FERMETURE A L'ECHELLE DU RESEAU DE FIBRES.....	122
III.8.1	Conservation de l'énergie.....	122
III.8.2	Conservation de la masse.....	125
III.8.3	Conditions aux limites	127
III.8.4	Variables de fermetures	129
III.8.5	Problèmes de fermetures.....	130
III.9	EQUATIONS FERMEES A L'ECHELLE DU MATERIAU	145
III.9.1	Conservation de l'énergie.....	145
III.9.2	Conservation de la masse.....	151
III.10	CONCLUSION.....	155
CHAPITRE IV.	CARACTERISATION DES PROPRIETES THERMO-HYDRIQUES	159
IV.1	INTRODUCTION	161
IV.2	CARACTERISATION MORPHOLOGIQUE.....	161
IV.2.1	Méthodes	161
IV.2.2	Résultats expérimentaux.....	162
IV.3	ANALYSE THERMOGRAVIMETRIQUE.....	163
IV.4	PREDICTION DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE.....	165
IV.4.1	Caractérisation expérimentale.....	165
IV.4.2	Évaluation de la conductivité thermique à partir de simulation sur des images tomographiques	166
IV.4.3	Modèles analytiques et semi-empiriques.....	167
IV.4.4	Résultats.....	172
IV.5	ÉVALUATION DE LA CHALEUR MASSIQUE.....	174
IV.6	PREDICTION DES PROPRIETES HYDRIQUES	176
IV.6.1	Isothermes de sorption / désorption.....	176
IV.6.2	Perméabilité à la vapeur ou diffusivité à la vapeur.....	185

IV.7	PREDICTION DE LA PERMEABILITE A L'AIR.....	193
IV.7.1	Calcul sur les milieux réels	193
IV.7.2	Modèles empiriques	193
IV.7.3	Résultats.....	195
IV.8	CONCLUSION.....	197
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES		199
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		201

NOMENCLATURE

Symboles latins

a_w	Activité de l'eau	-
A	Surface	$[m^2]$
b	Variable de fermeture	$[m]$
d_{gsv}	Variable de fermeture	$[s]$
c	Chaleur massique	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
C_p	Chaleur massique à pression constante	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
d_f	Diamètre des fibres	$[m]$
d	Variable de fermeture	$[m]$
D	Tenseur de diffusion microscopique	$[m^2.s^{-1}]$
\mathcal{D}	Tenseur de diffusion macroscopique	$[m^2.s^{-1}]$
D_u	Coefficient de diffusion hydrique isotherme	$[m^2.s^{-1}]$
D_v	Coefficient de diffusion de vapeur	$[m^2.s^{-1}]$
e	Epaisseur	$[m]$
E	Energie	$[J]$
$F(T)$	Fonction représentant la relation de Clausius Clayperon –Kelvin	-
g	Densité de flux de vapeur	$[kg.m^{-2}.s^{-1}]$
G	Flux de vapeur d'eau	$[kg.s^{-1}]$
HR	Humidité relative	-
K	Perméabilité	$[m^2]$
h_{sv}	Enthalpie massique de l'eau adsorbée	$[J.kg^{-1}]$
K	Coefficient de sorption / désorption	-
l	Longueur caractéristique associée à la petite échelle	$[m]$
l_p	Libre parcours moyen	$[m]$
L	Longueur caractéristique associée à la grande échelle	$[m]$
m	Masse	$[kg]$
\dot{m}	Débit	$[kg.m^{-2}.s^{-1}]$
\dot{m}_{cond}	Taux de condensation massique	$[kg.m^{-3}.s^{-1}]$
\dot{m}_{sorp}	Taux massique d'adsorption	$[kg.m^{-3}.s^{-1}]$
\dot{m}_l	Taux de changement de phase total	$[kg.m^{-3}.s^{-1}]$
\overline{M}	Masse molaire	$[g.mol^{-1}]$
n	Indice de réfraction	-
n_{ij}	Normales unitaires à l'interface dirigées de la phase i vers la phase j	-
\mathcal{N}	Nombre d'Avogadro	$[mol^{-1}]$
N	Nombre de Planck	-
P_v	Pression de vapeur	$[Pa]$
$P_{v,sat}$	Pression de vapeur saturante	$[Pa]$
q_i	Flux de chaleur par conduction à l'interface i	$[W.m^{-2}]$
Q	Débit volumique filtrant	$[m^3.s^{-1}]$
r_{cv}	Variable de fermeture	$[s]$

\mathbf{r}	Variable de fermeture	[m]
R	Constante des gaz parfaits	[J.mol ⁻¹]
Ra^*	Nombre de Rayleigh modifié	-
R_{eq}	Rayon équivalent	[m]
s_{cv}	Variable de fermeture	[m ³ .K.s.kg ⁻¹]
\mathbf{s}	Variable de fermeture	[m]
S_{ij}	Aire de l'interface i-j contenue dans le volume de prise de moyenne	[m ²]
S_m	Surface massique spécifique	[m ² .g ⁻¹]
S_v	Surface volumique spécifique	[m ² .m ⁻³]
T_i	Température locale dans la phase i	[K]
\tilde{T}	Déviations spatiales de la température	[K]
$\langle T \rangle$	Température moyenne	[K]
$\langle T_i \rangle$	Température moyenne dans la phase i	[K]
$\langle T_i \rangle^i$	Température moyenne intrinsèque de la phase i	[K]
\mathbf{u}_i	Vitesse de diffusion	[m.s ⁻¹]
u_D	Vitesse de Darcy	[m.s ⁻¹]
\mathbf{v}	Vitesse moyenne	[m.s ⁻¹]
\mathbf{v}_i	Vitesse d'une espèce i	[m.s ⁻¹]
V	Volume de prise de moyenne	[m ³]
w	Teneur en eau massique	[]
\mathbf{w}_{ij}	Vitesse de l'interface i-j	[m.s ⁻¹]
\mathbf{x}	Vecteur position du centre du volume de prise de moyenne	[m]
X	Dénote en général un ensemble	-
\mathbf{y}	Vecteur position relatif au centre du volume de prise de moyenne	[m]

Symboles grecs

β_R	Coefficient d'extinction	-
ϵ	Porosité totale	[]
ϵ_i	Porosité de la phase i	[]
λ	Conductivité thermique	[W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
$\boldsymbol{\lambda}$	Tenseur de conductivité local	[W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
$\tilde{\lambda}_i$	Déviations spatiales du tenseur de conductivité thermique locale dans la phase i	[W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
$\boldsymbol{\Lambda}$	Tenseur de conductivité macroscopique	[W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
μ	Viscosité dynamique	[kg.m ⁻¹ .s ⁻¹]
$\gamma_i(\mathbf{r})$	Fonction indicatrice de phase	-
ψ_i	Variable locale associée à la phase i	-
$\boldsymbol{\Psi}_i$	Tenseur d'ordre 1 ou 2	-
ρ	Masse volumique	[kg.m ⁻³]
$\tilde{\rho}_i$	Déviations spatiales de la masse volumique	[kg.m ⁻³]
ρ^a	Masse volumique apparente	[kg.m ⁻³]

ρ_s^a	<i>Masse volumique apparente de la phase solide</i>	<i>[kg.m⁻³]</i>
ρ^i	<i>Masse volumique absolue ou intrinsèque</i>	<i>[kg.m⁻³]</i>
σ	<i>Constante de Stephan-Boltzmann</i>	<i>[W.m⁻².K⁻¹]</i>
σ_m	<i>Surface d'une molécule adsorbée</i>	<i>[Å²]</i>
τ_0	<i>Epaisseur optique</i>	-
θ	<i>Angle azimutal</i>	<i>[°]</i>
φ	<i>Angle polaire</i>	<i>[°]</i>

Indices et Exposants

<i>a</i>	<i>air</i>
<i>abs</i>	<i>absolu</i>
<i>cond</i>	<i>condensation</i>
<i>f</i>	<i>fibres</i>
<i>g</i>	<i>gaz</i>
<i>l</i>	<i>Liquide</i>
<i>//</i>	<i>parallèle</i>
<i>⊥</i>	<i>perpendiculaire</i>
<i>rela</i>	<i>relatif</i>
<i>s</i>	<i>solide</i>
<i>sorp</i>	<i>sorption</i>
<i>v</i>	<i>vapeur</i>
<i>vap</i>	<i>Vaporisation</i>

Abréviations

<i>MEB</i>	<i>Microscopie Electronique à Balayage</i>
<i>PES</i>	<i>Polyester</i>
<i>PEK</i>	<i>Parallel Exponential Kinetics</i>
<i>RT</i>	<i>Réglementation Thermique</i>
<i>THC</i>	<i>Tétrahydrocannabinol</i>
<i>VER</i>	<i>Volume Élémentaire Représentatif</i>

INTRODUCTION GENERALE

Le développement durable, qui consiste à satisfaire les besoins d'aujourd'hui sans compromettre les ressources de demain, est une préoccupation de plus en plus présente dans l'ensemble des secteurs de l'activité humaine. La construction et plus particulièrement le bâtiment sont des secteurs qui affectent fortement l'environnement à travers la consommation de ressources naturelles et d'énergie, ainsi que par les émissions de déchets et de polluants, causant avec le temps, le réchauffement climatique. Limiter l'impact des bâtiments sur l'environnement tout en maintenant un environnement intérieur satisfaisant, est un enjeu important de la société d'aujourd'hui.

Ce constat étant partagé très largement par les autres pays européens, l'Europe et ses états membres se sont mobilisés pour définir un cadre stratégique de lutte contre les évolutions climatiques et une politique énergétique qui affecte au secteur bâtiment un rôle déterminant. Une de ses actions est la directive de décembre 2008 dite « initiative Climat » (ou directive 20-20-20) qui impose au secteur bâtiment un rôle déterminant pour intégrer les énergies renouvelables, améliorer l'efficacité énergétique et réduire les émissions de GES. En France, cette initiative s'est traduite par le Grenelle de l'environnement dont un des objectifs est d'arriver à 10 % de matériaux biosourcés dans le secteur du bâtiment hors bois d'œuvre pour 2020. Dans ce contexte, l'utilisation des matériaux issus de matières premières renouvelables, comme les matériaux végétaux, est une réponse au problème d'épuisement de ressources naturelles et de déchets en fin de vie du bâtiment.

Pour cela, il est nécessaire que les performances techniques et fonctionnelles de ces matériaux de substitution (laine de lin, de chanvre, ouate de cellulose, etc...) soient bien étudiées et au moins équivalentes à celles des matériaux usuels.

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à un matériau isolant biosourcé, la laine de chanvre, qui possède des propriétés thermiques et hydriques intéressantes. Ce type de matériau fibreux, anisotrope et fortement poreux, possède à l'échelle microscopique une structure complexe et aléatoire.

L'objectif de cette thèse est de décrire précisément la morphologie de ce type de laine, d'évaluer ses propriétés thermiques et hydriques et de concevoir un modèle macroscopique permettant d'appréhender son comportement thermohydrique. Pour cela, nous avons recours à une méthode de changement d'échelle par prise de moyenne. Deux changements d'échelles seront effectués afin de bien distinguer le comportement des éléments constitutifs (fibres de chanvre) de celui de l'isolant à l'échelle du produit. A la différence des approches classiques phénoménologiques qui utilisent une formulation directement macroscopique, on peut ainsi prendre en compte la complexité géométrique de la microstructure.

Ce travail de thèse se divise en quatre chapitres.

Le premier chapitre de ce mémoire situe le contexte de l'étude. Une première partie décrit la structure des fibres de chanvre ainsi que l'élaboration des laines issues de ces fibres, utilisées dans le bâtiment pour l'isolation. La seconde partie présente les connaissances sur les milieux poreux/fibreux nécessaires à la compréhension du

mémoire et décrit les mécanismes de transferts de chaleur et d'humidité au sein de ces matériaux. Une attention plus particulière est donnée aux différents modèles présents dans la littérature scientifique.

Dans le second chapitre, les techniques de caractérisation par imagerie sont présentées. Deux techniques sont utilisées : la microscopie électronique à balayage et la tomographie à rayons X. Le principe de cette dernière est décrit ainsi que les outils développés afin d'analyser les images 3D. Les résultats obtenus concernant notamment la morphologie de la laine : diamètre et orientation des fibres, distribution porale, identification des types de fibres, nombre de contacts... sont présentés.

Le troisième chapitre met en place un modèle multiéchelles pour décrire les transferts de chaleur et de masse couplés en prenant en compte le changement de phase et le phénomène de sorption/désorption. Pour bien comprendre le comportement hygrothermique des fibres de chanvre et notamment l'influence de la teneur en eau sur les propriétés effectives des fibres, nous réaliserons un premier changement d'échelle depuis l'échelle des hétérogénéités internes de la fibre de chanvre jusqu'à l'échelle de la fibre homogénéisée. Le second changement d'échelle permettra de passer d'un milieu hétérogène constitué de fibres de chanvre, de polymère et d'air jusqu'à l'échelle du produit ou échelle macroscopique, où le matériau est considéré comme homogène.

Le dernier chapitre s'intéresse aux différentes propriétés thermiques et hydriques de la laine de chanvre. Différentes méthodes (expérimentales, modèles semi-empiriques et calculs sur des images tomographiques) sont utilisées ce qui donne une idée sur le comportement thermohydrique de ce type de matériaux ainsi qu'une caractérisation de leurs morphologies.

Chapitre I.

ÉTAT DE L'ART

I.1 CONTEXTE ET ENJEUX

Les normes et réglementations actuelles poussent le secteur du bâtiment à se diriger vers des constructions durables et respectueuses de l'environnement. Le secteur du bâtiment est responsable de 42 % des consommations d'énergie et de la production du tiers des émissions de dioxyde de carbone (deuxième plus grand émetteur de CO₂ après l'industrie), ce qui contribue au réchauffement climatique [DIA, 08]. L'amélioration des performances énergétiques tout en diminuant les rejets de gaz à effet de serre issus de ce secteur font partie des objectifs à atteindre. Le renforcement de l'isolation thermique de l'enveloppe des bâtiments reste encore le moyen le plus efficace pour réaliser des économies d'énergie.

Actuellement, de nombreux matériaux isolants existent (isolants minéraux : laines de verre, de roche..., isolants synthétiques : mousse polyuréthane, polystyrène expansé, polystyrène extrudé...). Mais depuis quelques années, on voit émerger des matériaux « biosourcés » à base de fibres naturelles pour l'isolation des bâtiments. Bien que restant encore marginaux (*Les filières industrielles stratégiques de l'économie verte*, 2010) ces matériaux connaissent un essor croissant lié au développement de produits performants à faible impact environnemental, notamment en limitant de manière non négligeable les émissions de gaz à effet de serre.

Dans ce mémoire, on s'intéresse plus particulièrement à un matériau biosourcé à base de fibres d'origine naturelle : la laine de chanvre.

I.2 LES FIBRES NATURELLES

Le terme « fibre naturelle » regroupe plusieurs types de fibre qui se différencient en fonction de l'origine de la fibre. Ainsi, une fibre naturelle peut-être d'origine organique végétale, organique animale ou d'origine minérale (Figure I-1).

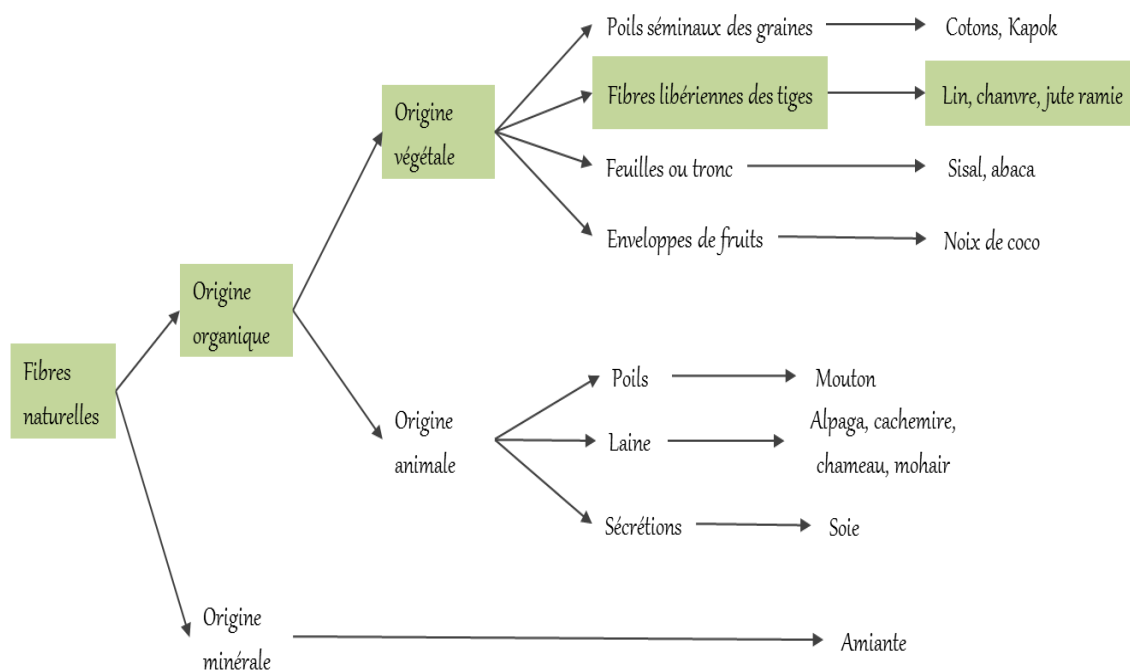


Figure I-1 : Les différents types de fibres naturelles.

Comme on peut le voir sur la Figure I-1, les fibres des plantes pourraient également être classifiées en fonction de leur emplacement dans la plante. Par exemple, les fibres libériennes telles que le lin, le chanvre ou le jute sont extraites de la tige de la plante tandis que d'autres fibres sont extraites à partir de graines (Coton), fruits (Noix de coco, ananas), ou encore des feuilles de la plante (Sisal). Les origines et les propriétés de ces différentes fibres ont été décrites de façon détaillée par Faruk et al. (2012). Les fibres végétales sont extraites de la plante en utilisant des procédés largement connus et contrôlés dans l'industrie textile.

I.2.1 Les fibres végétales : avantages et inconvénients

Les fibres végétales présentent plusieurs avantages. Elles constituent tout d'abord une ressource biodégradable locale à faible coût et sont renouvelables. Elles présentent un faible impact environnemental (six fois moins énergivores que les fibres de verre et douze fois moins que les fibres de carbone (Dujardin, 2014)). Enfin, elles possèdent une faible densité ce qui leur permet d'avoir des propriétés spécifiques (grandeurs physiques ramenées à la densité) comparables à celles des fibres de verre dont elles constituent une alternative (Ilczyszyn, 2013; Weidmann, 2010). Les fibres végétales présentent aussi un certain nombre d'inconvénients qui découlent principalement du caractère naturel de ces fibres, notamment une forte variabilité des propriétés pour une même espèce qui est due à des facteurs comme le climat, la densité de semis, l'âge de la plante, etc. À titre d'exemple, la teneur en cellulose, principal composant d'une fibre végétale dont la quantité influe sur les propriétés de la fibre, varie en fonction de l'âge de la plante (Sedan, 2007). De plus, ces plantes sont généralement sensibles au feu, aux attaques de rongeurs et en cas d'humidité prolongée, des moisissures peuvent se développer.

I.2.2 Applications des fibres végétales

L'utilisation des fibres végétales est croissante dans les secteurs du bâtiment, des transports et des loisirs. Elles peuvent être utilisées seules comme la ouate de cellulose ou la laine de chanvre qui servent d'isolants dans le bâtiment, ou encore en association avec un matériau polymère formant ainsi un matériau composite à base de fibres végétales. Dans ce cas, le but premier recherché pour le polymère n'est pas son caractère isolant, mais ses propriétés mécaniques spécifiques qui permettent une meilleure cohésion de l'ensemble des fibres.

I.3 LE CHANVRE

I.3.1 Généralités

Le chanvre dont le nom scientifique est *Cannabis Sativa* (Figure I-2), est cultivé par l'homme depuis plus de 8 000 ans pour ses fibres résistantes, ses graines oléagineuses et ses vertus médicinales. Il existe trois espèces de chanvre : *Cannabis sativa*-chanvre, *Cannabis indica*-chanvre et *Cannabis ruderalis*-chanvre. Seule la première est destinée à la culture du chanvre industriel ; elle se caractérise par une faible teneur en tétrahydrocannabinol (THC), moins de 2 %. En général, on trouve cette espèce en Asie centrale et en Europe (Bouloc, 2006). La plante de chanvre mesure de 2 à 4 m de

hauteur et sa tige a un diamètre moyen variant de 1 à 3 cm. Sa morphologie est néanmoins très dépendante de l'espèce, des conditions environnementales et du stade développement de la plante. Un des avantages de cette plante est que sa croissance est assez courte, environ 4 mois (Boulloc, 2006).

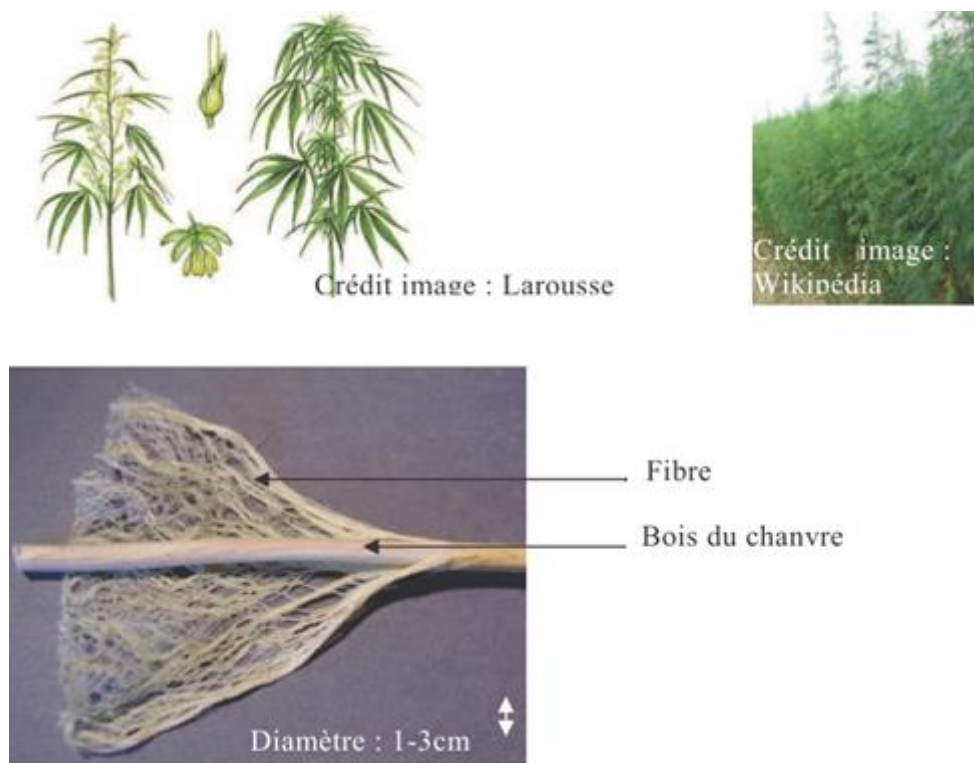


Figure I-2 : Composition d'une tige de chanvre.

La culture du chanvre a persisté durant plusieurs siècles principalement en raison de l'utilisation de sa fibre, pour réaliser les voiles de bateau, du cordage, du linge de maison ou des vêtements. Il a été longtemps utilisé dans l'agriculture européenne, par contre son activité a diminué du fait de la concurrence de fibres exotiques ou artificielles au début des années 1960 (Baley, 1990). Des années 1940 jusqu'à la fin des années 1990, l'industrie papetière a été le seul véritable utilisateur du chanvre. Actuellement, la demande et le développement de nouveaux marchés (bâtiment, plasturgie) ouvrent au chanvre de nouvelles perspectives. L'intégralité de la plante est valorisable et trouve des applications variées (Figure I-3).

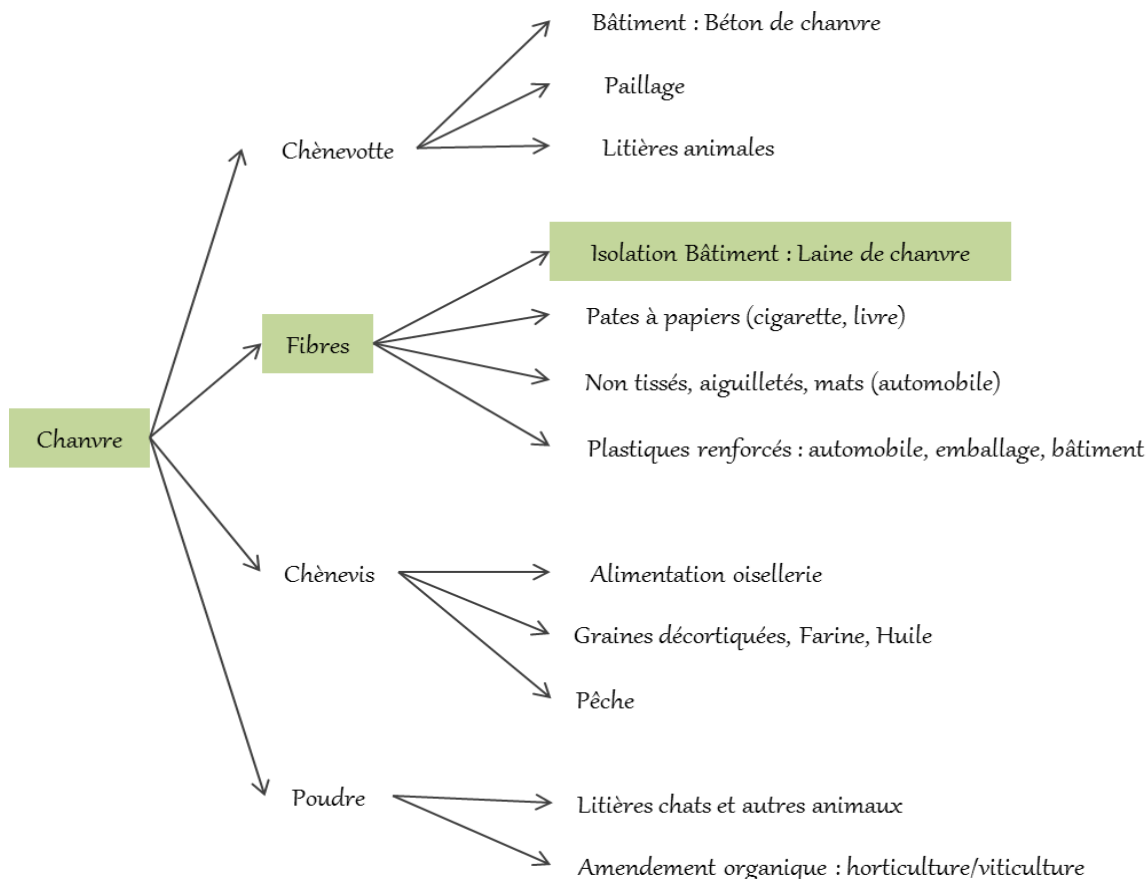


Figure I-3 : Les différentes utilisations du chanvre.

Le chanvre donne quatre produits principaux : la graine ou chènevis, les fibres, les chènevottes (le bois) et la poudre (la poussière). En général, la graine n'est pas valorisée dans les matériaux de construction, mais connaît des applications dans l'alimentation et la cosmétique. La chènevotte est utilisée essentiellement en paillage, dans le domaine de la construction pour fabriquer le béton de chanvre ou comme litière animale. La poudre s'utilise de même comme litière ou comme combustible (sous forme de granulés compactés). Les fibres, longtemps utilisées pour les cordes et le papier, sont de plus en plus utilisées sous forme de laine pour l'isolation des bâtiments.

I.3.2 Composition et transformation de la tige de chanvre

L'observation d'une coupe transversale de la tige de chanvre au microscope électronique laisse apparaître plusieurs couches de tissu végétal comme on peut le voir sur la Figure I-4a. Sur cette figure, la technique de coloration au carminot-vert de Mirande fait apparaître les tissus riches en cellulose colorés en rose et les tissus fortement lignifiés en vert (Vignon et al., 1995). Ceci est vérifié sur la Figure I-4b où une deuxième technique de coloration a été utilisée, le test de phloroglucinol-acide, qui permet de détecter la lignine. On peut voir que la chènevotte est plus riche en lignine que les fibres.

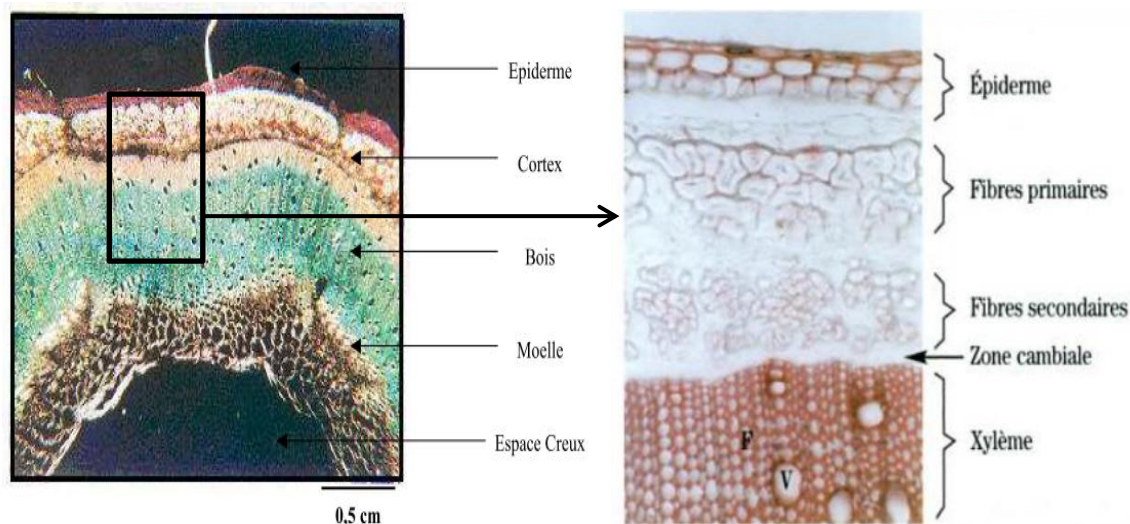


Figure I-4 : a) Micrographie d'une coupe transversale de tige de chanvre (Vignon et al., 1995), b) Mise en évidence de la lignine par le test de phloroglucinol-acide (Bouloc, 2006).

On peut distinguer :

- *L'épiderme*, constitué d'une couche de cellules à paroi cellulosique et d'une cuticule formée par une couche de nature lipidique en dépôt continu. Cette cuticule est imperméable, mais s'interrompt par des ouvertures appelées « stomates ».
- *Le cortex*, riche en fibres corticales regroupées en amas, et divisées en deux types de fibres : les fibres primaires et secondaires qui forment deux anneaux autour du Xylème central. Les fibres primaires se caractérisent par leurs longueurs (les fibres secondaires ont une longueur modérée) et leur paroi cellulaire plus épaisse (Bouloc, 2006).
- *Le bois ou Xylème ou chènevotte* assure le transport de la sève dans la plante. Il est constitué de cellules de parenchyme, de fibres ligneuses et de vaisseaux conducteurs (Sedan, 2007).
- *La moelle* constituée de parenchyme médullaire.
- *Un espace creux* au centre de la tige qui, pour des plantes âgées, peut occuper plus de la moitié du diamètre de la tige.

La séparation des constituants de la tige peut se faire soit sans défibrage pour donner les chènevottes fibreuses, soit par le processus de défibrage mécanique qui permet d'obtenir la chènevotte (défibrée) et les fibres de chanvre séparées (Figure I-5).

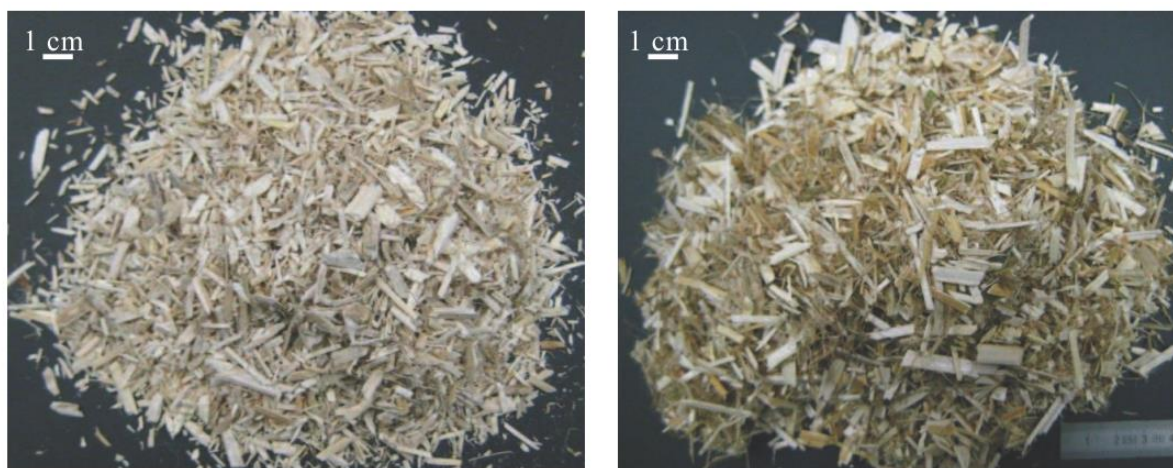


Figure I-5 : Comparaison entre les chènevottes fibreuses (gauche) et défibrées (droite) (Chamoin, 2013).

Le processus de défibrage du chanvre ne nécessite aucun traitement chimique et est seulement réalisé sous action mécanique (Figure I-6).

- La décortication, où la moelle (matière ligneuse) est désolidarisée de la tige libérienne par une opération mécanique exercée sur la tige entière (guillotine, broyeuse).
- La séparation sépare les différentes fractions végétales obtenues.
- L'affinage se focalise sur les faisceaux afin de réduire le nombre de fibres unitaires par faisceau (en éliminant les liants comme les pectines et la lignine) jusqu'à éventuellement l'obtention de fibres élémentaires.

A l'issue du défibrage, on obtient deux produits (fibres et chènevotte) et un sous-produit (poussière ou poudre).

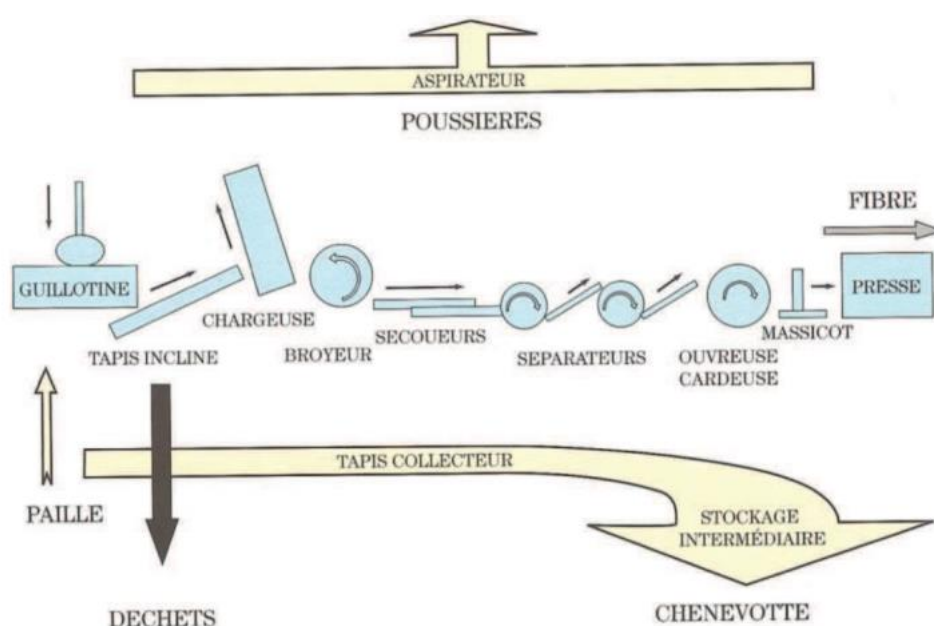


Figure I-6 : Diagramme fonctionnel d'une ligne de défibrage (Bouloc, 2006).

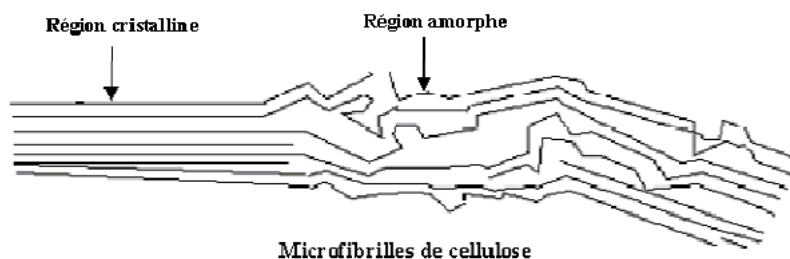


Figure I-8 : Représentation des microfibrilles constituant les fibres de cellulose (Ragoubi, 2010).

Les interactions moléculaires sont fortes et l'essentiel de la cohésion est assuré en empêchant la pénétration des réactifs. Grâce à cette grande cohésion, la cellulose est insoluble dans la plupart des solvants, par contre elle est de nature très hydrophile et peut contenir plus de 70 % d'eau liée.

1.3.3.1.2 Les hémicelluloses

Dans la plupart des fibres naturelles, la cellulose est mélangée à des hémicelluloses qui sont également des polysaccharides. Les hémicelluloses forment une classe de polymères très variés (de nombreux monomères et de nombreux branchements différents) et solubles dans l'eau. En utilisant des solutions alcalines, ils peuvent être extraits de la paroi des cellules végétales.

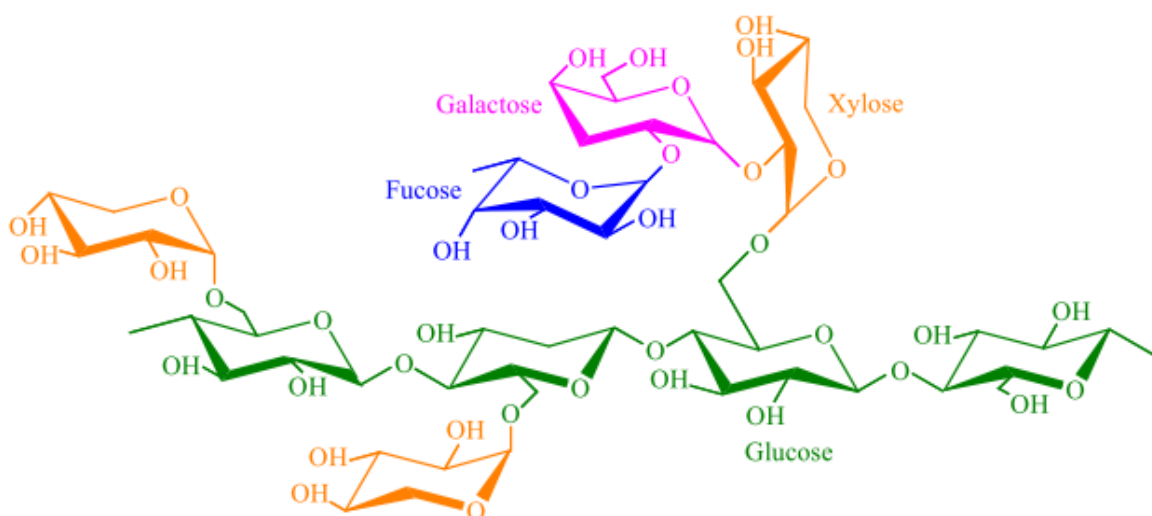


Figure I-9 : Structure d'une hémicellulose de type xyloglucane (Sedan, 2007).

La classe d'hémicelluloses la mieux étudiée correspond aux xyloglucanes (Figure I-9). Ils sont constitués d'une chaîne de glucose et de courtes chaînes latérales de xylose, galactose et fucose (Bledzki and Gassan, 1999).

1.3.3.1.3 Les pectines

Les pectines sont des polymères de polysaccharides acides, composés d'une chaîne principale d'acide uronique (Figure I-10), mais on doit mentionner qu'il existe des ramifications au niveau de ces acides.

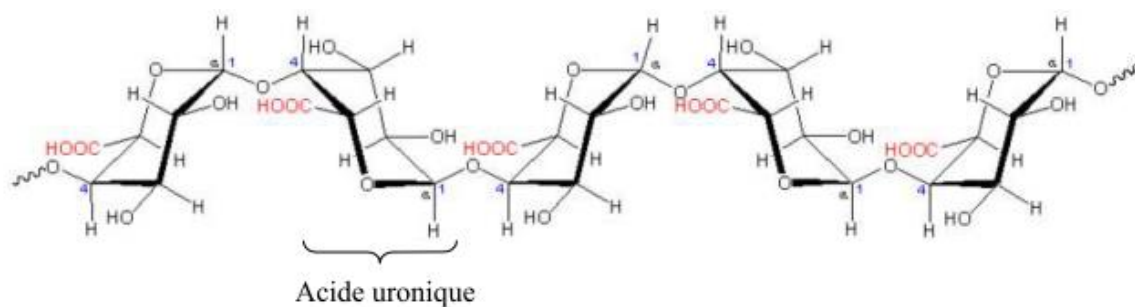


Figure I-10 : Structure chimique de la pectine de type D-galacturonique (Sedan, 2007).

Leurs molécules possèdent des groupements carboxyliques qui leur décernent une capacité à échanger des ions. Dans le cas de la paroi végétale, c'est principalement les ions de calcium provenant de la circulation apoplasmique, qui ont la capacité de former des ponts calciques entre deux groupements carboxyliques (Sedan, 2007).

I.3.3.1.4 La lignine

Les lignines sont des polymères tridimensionnels provenant de la polymérisation radicalaire de trois alcools (Figure I-11). Leur structure dépend de l'espèce végétale et de la localisation au sein de la paroi végétale (Vignon et al., 1996).

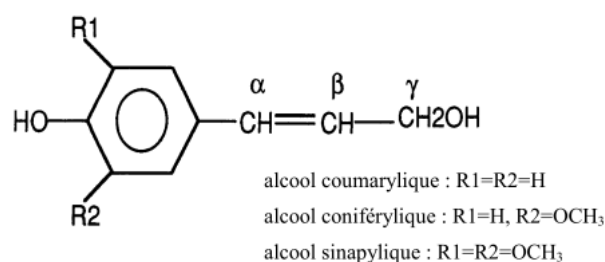


Figure I-11 : Structure chimique des fragments fondamentaux de la lignine (Sedan, 2007).

La lignine contribue à la résistance mécanique des parois cellulaires de la plante ainsi qu'à la résistance aux agents pathogènes. Possédant un caractère hydrophobe, elle dispose une résistance à l'eau et contrôle le transport des solutions ainsi que la teneur en eau des plantes. Et elle participe à la cohésion des fibres dans la partie chènevotte.

I.3.3.2 Morphologie de la fibre de chanvre

Comme pour la plupart des fibres naturelles, la structure des fibres de chanvre est complexe. Comme on l'a déjà vu, les fibres sont des composites renforcés par des fibrilles de cellulose. Elles possèdent une section polygonale et au centre se trouve un espace vide appelé lumen, qui représente environ 2/3 du diamètre total. La paroi de ces fibres possède une épaisseur de 5 à 10 μm (Sedan, 2007).

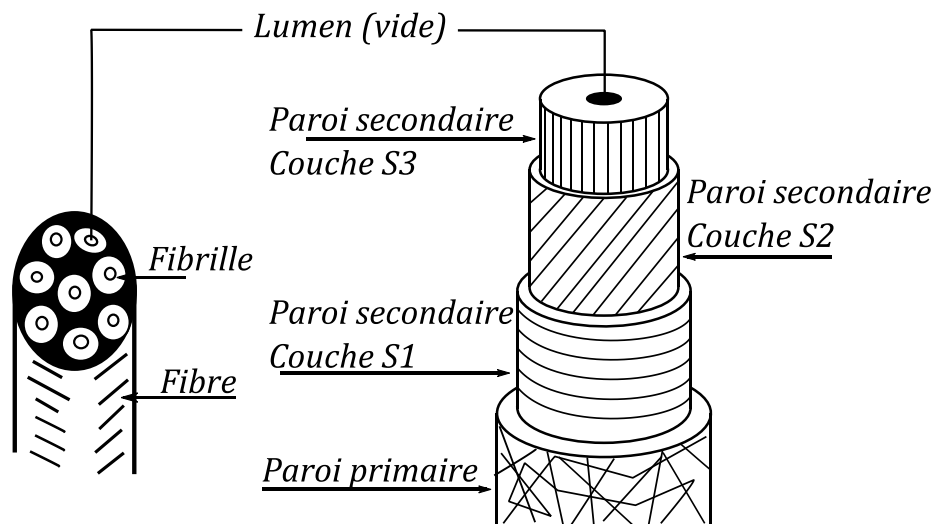


Figure I-12 : Représentation schématique d'une fibre individuelle et d'une cellule (fibrille)

Comme on peut voir sur la Figure I-12, chaque cellule se compose de deux parois cellulaires principales : primaire et secondaire. La paroi primaire est constituée d'un réseau de microfibrilles de cellulose renfermée dans une matrice amorphe de pectine et d'hémicellulose. La paroi secondaire est composée par des filaments hydrophobes constitués de cellulose et de lignine et composés de 3 couches (Placet et al., 2012).

D'après (Sedan, 2007), les chaînes de cellulose s'associent entre elles de façon parallèle par liaisons hydrogène pour former des microfibrilles dont la section (de l'ordre de quelques nm) est variable selon les espèces végétales (Hon, 1994). La rigidité des chaînes causée par l'enchaînement des unités constitutives de la cellulose favorise la cristallinité quand elle est alliée au développement des liaisons hydrogènes. La formation de zones cristallines très cohésives est responsable de l'essentiel des propriétés physiques et chimiques de ce matériau. Les microfibrilles sont réunies entre elles par une matrice constituée d'hémicelluloses et de pectines (Figure I-13b-c). A la fin de la croissance, le réseau polysaccharidique peut être solidifié par un réseau secondaire de protéines, ce qui augmente encore la complexité de la matrice (Figure I-13d).

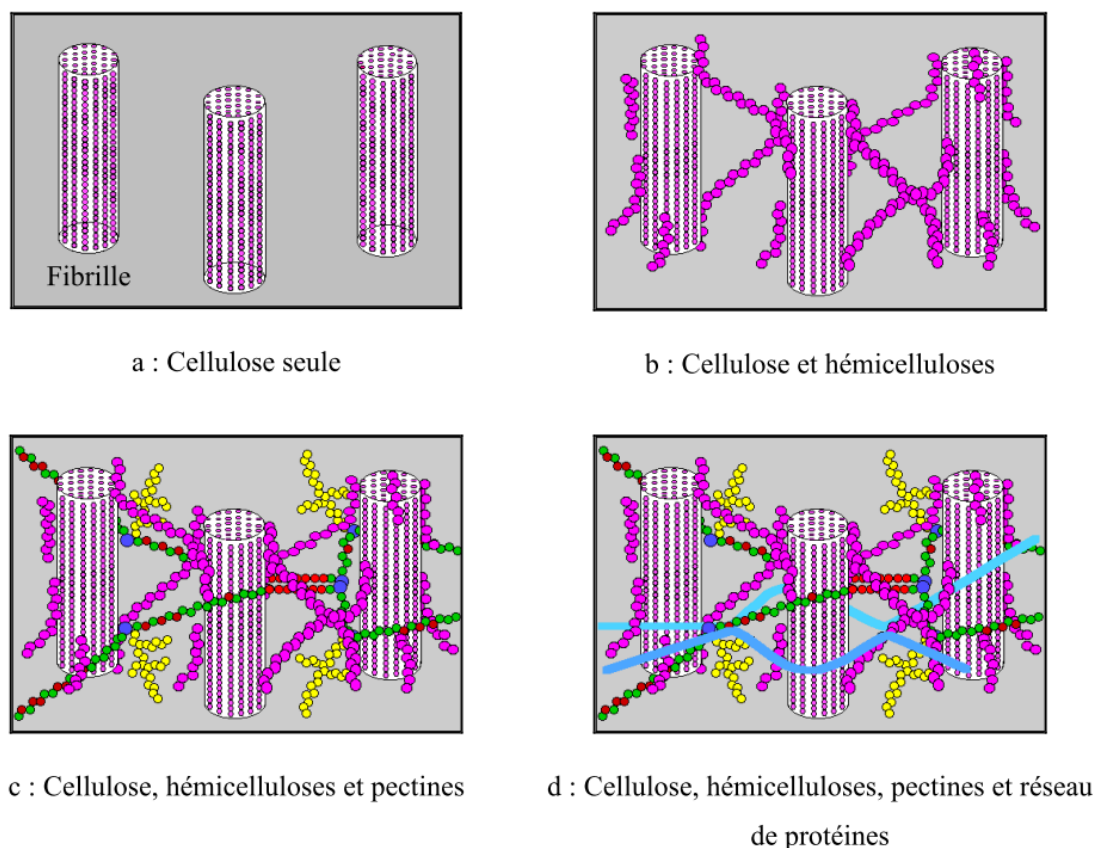


Figure I-13 : Représentation schématique de l'agencement des différents composants des fibres de chanvre à l'échelle micrométrique (Sedan, 2007).

D'après (Placet et al., 2014, 2012), parmi les fibres de chanvre pour une même gamme de diamètres extérieurs (20-30 microns), deux types de structures internes peuvent être observés : (i) les fibres élémentaires avec une paroi épaisse et un petit lumen et (ii) un faisceau de fibres fines avec un diamètre extérieur de quelques microns. Selon les données de la littérature, ces deux structures ont été identifiées comme étant des fibres respectivement primaires et faisceau de fibres secondaires.

Le diamètre moyen des fibres de chanvre (Tableau I-2) varie en général entre 15 et 50 μm . Ceci dépend de chaque plante et de sa maturité.

Références	Diamètre moyen (μm)
(Placet, 2009)	42
(Placet et al., 2012)	$27,6 \pm 7,5$
(Eichhorn and Young, 2004)	$31,2 \pm 4,9$
(Bourmaud and Baley, 2012)	17,7
(Duval et al., 2011)	$17,1 \pm 4,5$
(Fan, 2010)	$37,42 \pm 6,62$
(Thygesen, 2001)	20-40

Tableau I-2 : Diamètre des fibres de chanvre pour quelques références de la littérature.

I.3.4 La laine de chanvre

Les fibres, issues du processus de défibrage appelées fibres techniques et qui contiennent jusqu'à peu près 5 % de chènevotte, subissent ensuite un nettoyage mécanique spécifique pour les mélanger à un liant afin d'obtenir une laine composée de 90 % de chanvre et de 10 % de liant sous forme de fibres polymères qui maintient l'ensemble. De multiples couches de fibres sont plaquées les unes aux autres jusqu'à obtention de matelas qui sont passés au four à plus de 130°C afin de permettre aux fibres synthétiques et aux fibres naturelles de se coller entre elles.

Cette laine est utilisée pour l'isolation et existe soit en forme de rouleaux pour les planchers et les toitures, soit en panneau semi-rigide pour les murs avec des épaisseurs qui varient de 40 à 200 mm.

La masse volumique de la laine de chanvre est comprise généralement entre 20 et 40 kg.m⁻³ et sa conductivité thermique se situe autour de 0,04 W.m⁻¹.K⁻¹ comme pour les laines de verre.

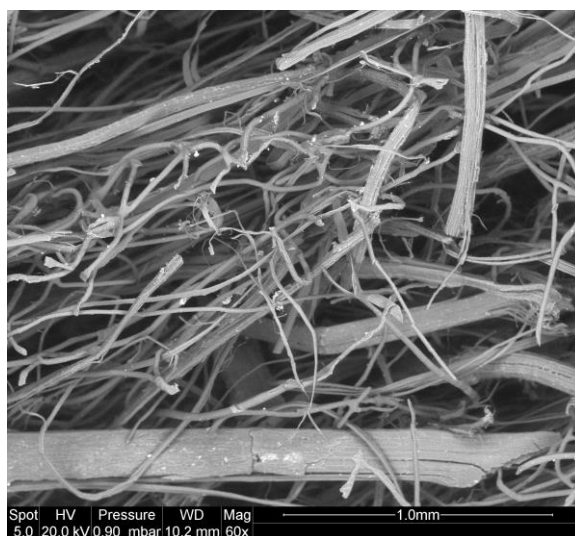


Figure I-14 : Observation de la laine de chanvre au MEB (réseaux fibreux).

D'après la Figure I-14, on peut voir que le réseau fibreux est poreux et tortueux et que les fibres présentent un diamètre compris entre 16 µm et 192 µm. Cela est dû à la nature des fibres de chanvre de se présenter soit comme une fibre toute seule soit comme un paquet de fibre.

I.4 MECANISMES DES TRANSFERTS AU SEIN DE MILIEUX POREUX

I.4.1 Les milieux poreux

Les milieux poreux sont des matériaux constitués d'un amas d'éléments solides (matrice solide) entre lesquelles les vides forment l'espace poreux occupé par un ou plusieurs fluides. Cette présence de fluide, même en faibles quantités, entraîne de grandes différences du comportement physique du matériau.

La géométrie des pores et la distribution de leurs tailles influencent directement les mouvements des fluides et conditionnent la nature des interactions fluide – solide.

Généralement, on distingue trois types de pores (I.U.P.A.C, 1994) :

- les macropores dont le diamètre est supérieur à 50 nm ;
- les mésopores dont le diamètre est compris entre 2 et 50 nm ;
- les micropores dont le diamètre est inférieur à 2 nm.

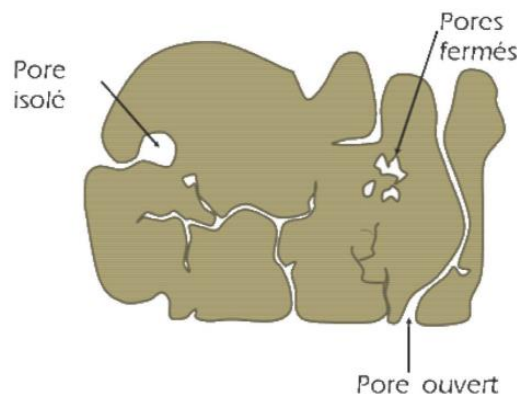


Figure I-15 : Les différents types de pores.

Comme on peut voir sur la Figure I-15, il existe différents types de pores et par suite différents types de porosité.

- Porosité fermée : c'est la porosité des pores non accessibles (fermés),
- porosité libre ou ouverte : par opposition à la porosité fermée,
- porosité totale : c'est la somme des deux porosités.

En plus, pour un milieu poreux, la matrice solide est supposée homogène, isotrope, indéformable et inerte chimiquement.

I.4.2 Les milieux fibreux

Les milieux fibreux sont une catégorie de milieu poreux possédant une morphologie particulière. Les matériaux fabriqués à partir de fibres, avec un arrangement aléatoire, ont des porosités plus importantes que celles classiques des milieux poreux. En général, on définit un rapport de forme des fibres qui est le rapport de la longueur par le diamètre.

En outre, les milieux fibreux sont anisotropes. Dans le cas des fibres végétales, on peut distinguer une anisotropie à deux niveaux.

Au niveau des fibres qui sont composées de plusieurs couches où on trouve un angle microfibrillaire entre les éléments composants les fibres comme la cellulose et l'axe de la fibre (Figure I-16).

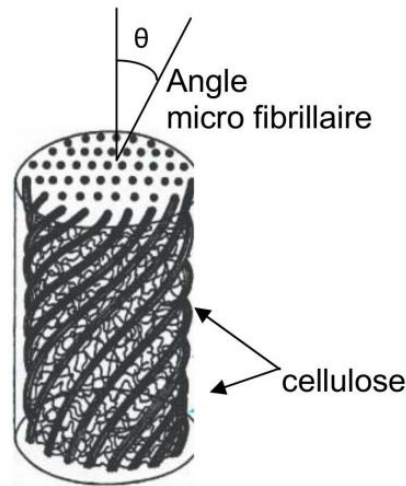


Figure I-16 : Structure d'une fibre végétale (Célino et al., 2013).

Une deuxième anisotropie au niveau du réseau des fibres. Cette anisotropie est due à l'orientation des fibres. Les grandeurs physiques, thermiques comme la conductivité ou hydriques comme la perméabilité à la vapeur, sont de ce fait également anisotropes.

I.4.3 Caractéristiques morphologiques

Pour caractériser la structure des milieux poreux et fibreux, plusieurs grandeurs sont utilisées couramment :

- la masse volumique (ρ),
- la porosité (ε),
- la surface volumique (S_v) et massique (S_m)

I.4.3.1 Masse volumique

La **masse volumique apparente** (ρ^a) est le rapport entre la masse de matériau et le volume apparent de l'ensemble du matériau.

$$\rho^a = \frac{m}{V} \quad (I.1)$$

où M est la masse de l'échantillon (kg) et V est le volume de l'échantillon (m^3).

On peut définir une masse volumique apparente de la phase solide :

$$\rho_s^a = \frac{m_s}{V} \quad (\text{à l'état sec}) \quad (I.2)$$

La **masse volumique absolue ou intrinsèque** (ρ^i) d'un matériau est le rapport entre la masse de matériau solide et le volume de la matière solide (pores ouverts et fermés exclus).

$$\rho^i = \frac{m_s}{V_s} \quad (I.3)$$

où m_s est la masse de la phase solide de l'échantillon (kg) et V_s est le volume de la phase solide de l'échantillon (m^3).

1.4.3.2 Porosité

Les pores représentent de microcavités ouvertes ou fermées, dues à l'emprisonnement de gaz ou de liquide dans un matériau. La **porosité** d'un matériau est le rapport entre le volume des vides et le volume du matériau.

$$\epsilon = \frac{V_{vide}}{V} = \frac{V_l + V_g}{V} = \frac{V - V_s}{V} = 1 - \frac{V_s}{V} = 1 - \frac{\rho^a}{\rho^i} \quad (1.4)$$

où V_l est le volume de liquide [m^3] et V_g , le volume de gaz [m^3].

1.4.3.3 Surface spécifique

La surface spécifique représente le rapport de l'aire de la surface totale des interfaces A_{sg} qui limite l'espace des pores au volume de l'échantillon V :

$$S_v = \frac{A_{sg}}{V} \quad (1.5)$$

L'aire de l'interface solide-gaz peut être aussi rapportée au volume de la matrice solide :

$$S_{v,s} = \frac{A_{sg}}{V_s} \quad (1.6)$$

D'où

$$S_v = \frac{V_s}{V} S_{v,s} = (1 - \epsilon) S_{v,s} = (1 - \epsilon) \frac{4}{d_f} \quad (1.7)$$

La surface massique S_m se définit par le rapport de l'aire de l'interface solide-gaz à la matrice solide :

$$S_m = \frac{A_{sg}}{m_s} \quad (1.8)$$

Les deux définitions sont liées par :

$$S_m = \frac{S_{vs}}{\rho^i} \quad (1.9)$$

1.4.4 Caractéristiques hydriques

1.4.4.1 Teneur en eau

La teneur en eau permet de quantifier la quantité d'eau dans un milieu donné. On peut définir **la teneur en eau massique** qui est le rapport entre la masse d'eau et la masse de la matrice solide :

$$w = \frac{m - m_s}{m_s} \quad (1.10)$$

C'est ce qu'on appelle teneur en eau en base sèche. Si on divise par la masse de l'échantillon on aura la teneur en eau à base humide

$$w = \frac{m - m_s}{m} \quad (I.11)$$

et la teneur en eau volumique qui représente le rapport entre le volume d'eau sur le volume total :

$$u = \frac{V - V_s}{V} \quad (I.12)$$

1.4.4.2 Activité de l'eau

L'activité de l'eau a_w n'est autre que le rapport entre la pression de vapeur P_v et la pression de vapeur saturante $P_{v,sat}$ à une température donnée :

$$a_w = \frac{P_v}{P_{v,sat}} \quad (I.13)$$

avec $P_{v,sat} = \exp\left(23,5771 - \frac{4042,2}{T-37,58}\right)$, valide pour une température entre 0 et 80 °C

1.4.4.3 Isothermes de sorption/désorption

Selon la teneur en eau dans le matériau, l'eau peut se présenter sous trois formes différentes (Figure I-18) (Nadeau and Puiggali, 1995) :

- *L'eau libre* ou l'eau capillaire, qui est liée à la porosité du milieu et se trouve dans les micropores des parois cellulaires et dans les lumens. Elle est piégée sous forme liquide par des forces capillaires.
- L'eau liée adsorbée sur et dans les parois de nos fibres, grâce à la constitution de nos fibres en cellulose, hémicellulose et lignine qui présentent des propriétés hydrophiles. Lorsque les parois sont saturées en eau, on arrive au point de saturation. Les phénomènes de retrait et gonflement observés dans les fibres végétales n'ont lieu que lorsque la teneur en eau est inférieure à la teneur en eau de saturation (autour de 30% en masse).
- La vapeur d'eau, qui peut aussi exister dans les lumens et les micropores.

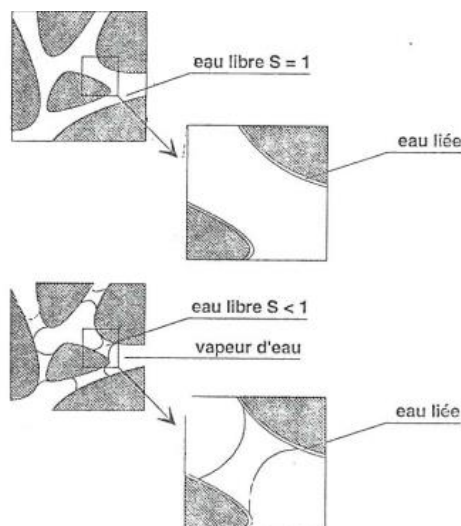


Figure I-17 : L'eau dans le matériau (Nadeau and Puiggali, 1995).

La fixation de l'eau se décompose en trois phénomènes (Figure I-18).

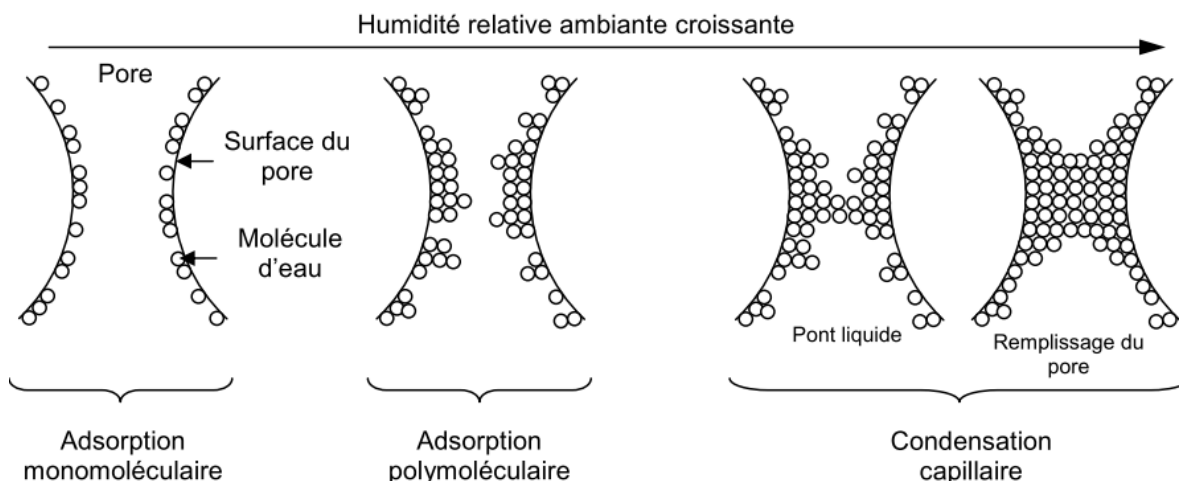


Figure I-18 : Phénomènes de fixation de l'eau dans un pore.

Dans un premier temps, les molécules d'eau se fixent sur la surface des pores formant une monocouche. Ces molécules sont maintenues sous l'effet des forces de VAN DER WAALS : c'est l'*adsorption monomoléculaire*.

Lorsque l'humidité augmente, d'autres molécules d'eau viennent se fixer sur cette première couche. Il s'agit de l'*adsorption polymoléculaire*.

Enfin, à partir d'un certain seuil d'humidité, les couches de molécules d'eau se rejoignent et forment ce que l'on appelle un « pont capillaire ». L'eau est piégée dans les pores par les forces capillaires (condensation capillaire).

Sur la Figure I-19 est représentée de façon générale la teneur en eau en fonction de l'humidité relative pour une température donnée. On peut voir notamment trois zones :

- L'adsorption monomoléculaire pour la zone 1 ;
- L'adsorption polymoléculaire pour la zone 2 ;
- La condensation capillaire pour la zone 3.

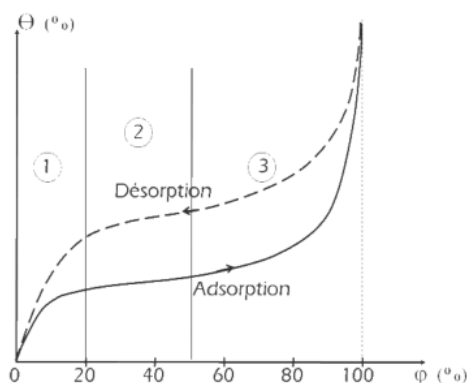


Figure I-19 : Courbe type d'une isotherme de sorption / désorption.

Ce type de courbe est dénommé « Isothermes de sorption/désorption ».

D'une manière générale, six types d'isothermes d'adsorption ont été observés (Figure I-20). Initialement l'analyse était faite à l'aide de cinq types d'isothermes d'adsorption physique très distinctes, décrite par Brunauer, Deming et Teller. Puis cette classification a été reprise par l'IUPAC en 1985 (Sing, 1985), dans laquelle a été ajoutée une isotherme d'adsorption à marches, observée plus récemment, notée VI (Rouquerol et al., 2003).

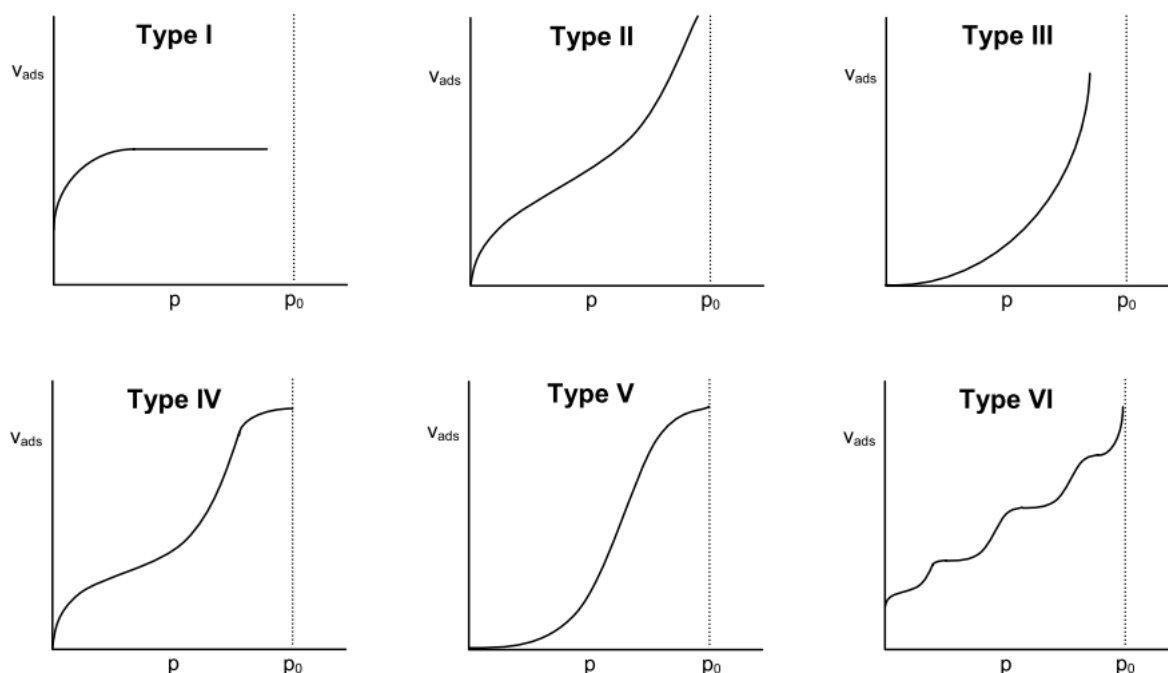


Figure I-20 : Les différents types des isothermes d'adsorption (Sing, 1985).

L'isotherme d'adsorption du type I est caractérisée par la présence d'un plateau horizontal traduisant une saturation de l'adsorbant, malgré l'augmentation de la pression (adsorption monomoléculaire). Cette isotherme est caractéristique du remplissage des adsorbants ayant des micropores qui se remplissent à des pressions

d'autant plus basses que leur largeur est plus faible. Cette isotherme réversible est parfois appelée isotherme de Langmuir.

L'isotherme d'adsorption du type II est caractérisée par une augmentation progressive de la quantité adsorbée en fonction de la pression relative d'équilibre. Cette isotherme met en évidence un point d'inflexion auquel correspond le passage de l'adsorption monomoléculaire à l'adsorption polymoléculaire, la couche adsorbée s'épaissit progressivement. Cette isotherme en S ou isotherme sigmoïde est caractéristique des adsorbants non poreux ou macroporeux.

Les isothermes d'adsorption du type III et V sont moins communes. Aux pressions les plus faibles, elles diffèrent des isothermes d'adsorption du type II et IV par leurs allures. Ce changement de courbure du début de l'isotherme d'adsorption est expliqué par le fait que les interactions adsorbantes/adsorbables sont faibles. Ce changement est observé dans le cas de l'adsorption de vapeur d'eau par une surface hydrophobe.

L'isotherme d'adsorption du type IV a la même allure que l'isotherme d'adsorption du type II pour les pressions relatives les plus basses ; pour les pressions relatives les plus élevées, elle est caractérisée par un palier de saturation qui correspond alors au phénomène de condensation capillaire. La longueur du palier est très variable et parfois réduite à un point d'inflexion. Cette isotherme d'adsorption est obtenue avec des adsorbants mésoporeux et peut présenter différents types d'hystérésis.

L'isotherme d'adsorption du type VI, à marches, correspond à une adsorption multicouche. Elle a été observée dans le cas de l'adsorption par des surfaces énergétiquement homogènes sur lesquelles les couches adsorbées se forment l'une après l'autre. Ce type d'isotherme est obtenu sur des surfaces non poreuses.

Il est répandu d'observer une hystérésis de la courbe de désorption par rapport à la courbe d'adsorption. En général, celle-ci est liée à la condensation capillaire, à la forme des pores (« bouteilles ») ou à la structuration des pores (interconnexions). Les différentes formes de la boucle d'hystérésis ont été classées par l'IUPAC en quatre types et schématisées dans la Figure I-21.

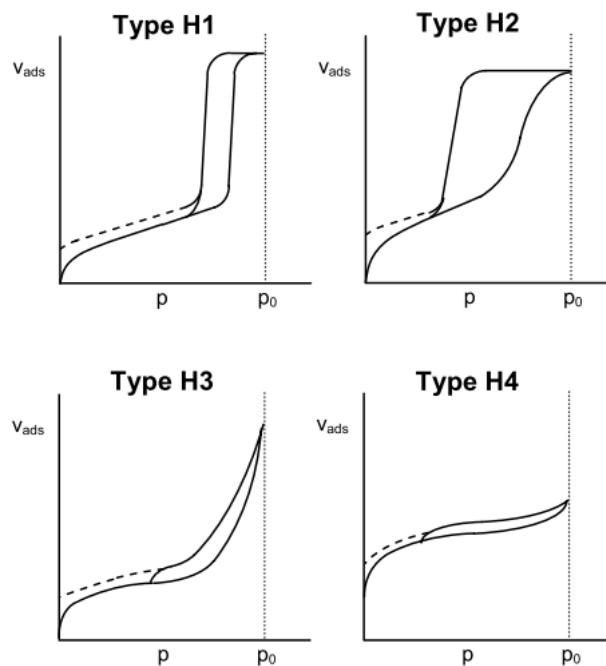


Figure I-21 : Classification des différents types d'hystérésis d'adsorption/désorption (Sing, 1985).

Les deux boucles d'hystérésis notées H1 et H2 apparaissent sur des isothermes du type IV, caractérisées par un palier de saturation, c.-à-d. une condensation capillaire dans les pores. Elles sont représentatives des adsorbants mésoporeux.

La boucle d'hystérésis H1 dispose des branches d'adsorption et de désorption parallèles et presque verticales. Elle est associée au cas d'adsorbants ayant une distribution très étroite de mésopores.

La boucle d'hystérésis H2 est observée dans le cas d'adsorbants ayant des mésopores interconnectés. La désorption est alors retardée jusqu'à ce que l'évaporation puisse se produire au niveau de l'entrée étroite du pore ou aux interconnexions. On remarque que les branches ne sont plus parallèles : sur l'adsorption, on aura le phénomène de condensation capillaire dans les pores les plus larges, sur la désorption, on aura le phénomène de vidange dans les pores les plus étroits.

Cependant, les deux boucles d'hystérésis notées H3 et H4 apparaissent sur des isothermes de type II qui ne présentent pas de palier de saturation. Dans ces conditions, la branche de désorption n'est pas toujours reproductible et résulte en général de la valeur maximale de la quantité adsorbée aux pressions relatives p/p_0 voisines de 1.

La boucle d'hystérésis H3, peut être liée à une condensation capillaire s'effectuant dans une texture non rigide par exemple des agrégats. Elle n'est pas caractéristique d'une mésoporosité définie.

La boucle d'hystérésis H4, est caractérisée par deux branches presque horizontales et parallèles sur une large gamme de pression p/p_0 . Elle est souvent associée à des adsorbants microporeux ayant des feuillets liés entre eux de façon plus ou moins rigide et entre lesquels peut se produire une condensation capillaire.

En complément, aux basses pressions, on peut observer une hystérésis (en pointiller sur la Figure I-21) notamment en présence de micropores. Ce phénomène peut être relié à une déformation de la structure poreuse non-rigide, à une fixation irréversible des molécules d'adsorbat dans les pores (pore et molécule de même dimension) ou à une réaction chimique entre l'adsorbat et le milieu poreux (Collet, 2004).

1.4.4.4 Transferts hydriques

Dans les milieux poreux (à porosité ouverte), un flux d'humidité circule sous l'effet des gradients de différents potentiels (la pression de vapeur, la température).

Dans le cas où il n'y a pas d'advection (gradient de pression totale nul), le flux total d'humidité g_h est la somme des flux de vapeur g_v soit par diffusion ou effusion, ainsi que le flux de liquide g_l ; exprimé par l'équation suivante (Mainguy et al., 1999) :

$$g_h = - \left(k_{v,diff} + k_{v,eff} + \frac{\rho_l \cdot r_v \cdot T}{P_v} K_l \right) \nabla P_v = -k \nabla P_v \quad (I.14)$$

avec k , la perméabilité vapeur [$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$] ; $k_{v,diff}$, la perméabilité à la vapeur par diffusion moléculaire à l'échelle macroscopique ; $k_{v,eff}$, la perméabilité à la vapeur par effusion à l'échelle macroscopique ; K_l , la conductivité hydraulique et ρ_l , la masse volumique du liquide [kg.m^{-3}].

On peut voir que la perméabilité à la vapeur est la somme de trois termes qui correspondent à trois modes de transferts différents :

- Transfert de vapeur par diffusion
- Transfert de vapeur par effusion
- Transport du liquide par écoulement liquide

Et la densité de flux de vapeur soit par diffusion ou effusion s'exprime sous la forme :

$$g_v = g_{v,d} + g_{v,ef} = - \left(D_v \frac{M_v}{RT} + \frac{D_0}{K_n} \frac{M_v}{RT} \right) \nabla P_v = - (k_{v,diff} + k_{v,eff}) \nabla P_v \quad (I.15)$$

$$K_n = \frac{L_{pm}}{d_p}$$

avec D_0 , le coefficient de diffusion de vapeur dans l'air libre [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$] ; K_n , le nombre de Knudsen ; L_{pm} , le libre parcours moyen [m] qui dépend de la température et de la pression et d_p , le diamètre des pores [m].

On peut alors distinguer trois domaines :

- si $K_n \gg 1$ ou $d \ll L_{pm}$: le transport se fait par effusion (ou transport de Knudsen) Le nombre de chocs molécules-paroi est très supérieur au nombre de chocs intermoléculaires (Figure I-22).
- si $K_n \ll 1$ ou $d \gg L_{pm}$: le transport se fait par diffusion moléculaire libre. Les collisions contre les parois sont négligeables par rapport aux collisions entre les molécules (Figure I-22).
- si $K_n \equiv 1$ ou $d \equiv L_{pm}$: le transport se fait par diffusion mixte (domaine de transition).

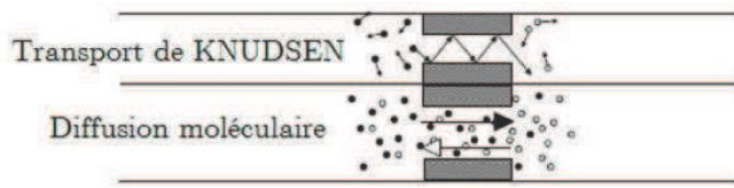


Figure I-22 : Mécanismes de transfert de vapeur (Chamoin, 2013).

La Figure I-23 présente l'évolution du coefficient de diffusion de vapeur dans les milieux poreux en fonction du diamètre des pores et du nombre de Knudsen K_n pour une température de 23°C et à pression atmosphérique.

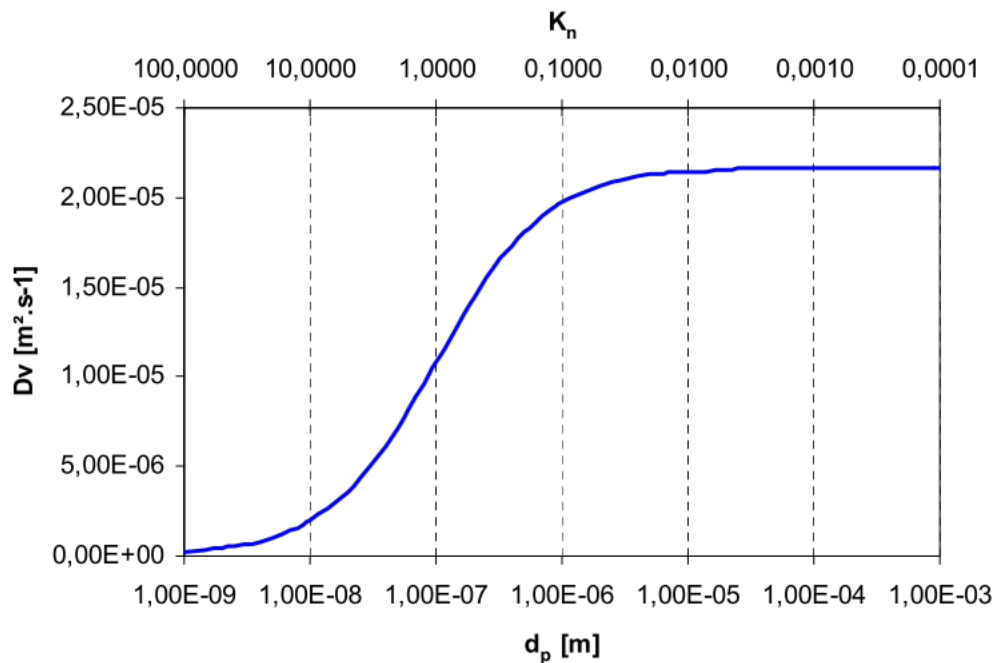


Figure I-23 : Coefficient de diffusion de vapeur en fonction du diamètre des pores (Collet, 2004).

D'après De Vries (De Vries, 1958), l'évolution générale des coefficients de diffusion isotherme en fonction de la teneur en eau comporte trois parties :

- aux faibles teneurs en eau ($u < u_k$), la phase condensée se présente sous forme adsorbée ou dans des îlots capillaires. Le transfert d'humidité se fait uniquement par transfert en phase vapeur.
- pour des teneurs en eau plus importantes, les îlots capillaires augmentent en taille et en nombre, la section de passage du flux de vapeur diminue et celle-ci diffuse par des mécanismes de condensation-évaporation aux interfaces liquide-vapeur. Dès que la continuité de la phase liquide s'établit ($u = u_k$), le coefficient D_{uL} augmente rapidement.
- aux fortes teneurs en eau, le transfert en phase liquide devient nettement prépondérant.

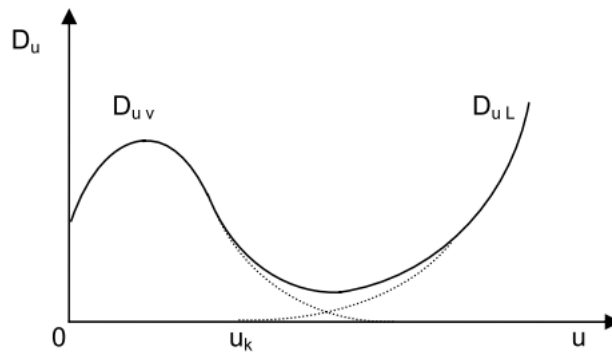


Figure I-24 : Évolution des coefficients de diffusion isotherme (Collet, 2004).

I.4.5 Caractéristiques thermiques

On distingue trois grandes parties dans la caractérisation des transferts thermiques, et chaque partie correspond à un mode fondamental de transfert de chaleur :

- La conduction
- La convection
- Le rayonnement

Vu que l'énergie thermique d'un milieu matériel n'est autre que l'énergie cinétique de ses constituants fondamentaux ayant une certaine liberté de mouvement, ceux-ci peuvent échanger tout ou partie de leur énergie thermique, c.-à-d. gagner ou perdre de l'énergie cinétique :

- Soit par interaction directe avec les particules proches (chocs de molécules, vibration du réseau d'atomes, diffusion d'électrons libres, par exemple), ce qui correspond à la conduction. Ce mode d'échange tend à une distribution homogène de l'énergie cinétique moyenne des diverses particules par diffusion des zones où la température est élevée vers les zones où elle est plus faible. La loi macroscopique correspondant à ce processus de diffusion de chaleur est la loi de Fourier présentée par l'équation suivante :

$$q'' = \lambda \nabla T \quad (\text{I.16})$$

avec q'' , la densité de flux [W.m^{-2}] ; λ , la conductivité thermique [$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$] et T , la température [K].

- Soit par émission et adsorption de radiations électromagnétiques correspondant au rayonnement. Dans le cas d'un milieu optiquement épais, on trouve une expression du flux net de type diffusif :

$$q_{net}^r = -\frac{16n\sigma T^3}{3\beta} \nabla T = \lambda_r(T) \nabla T \quad (\text{I.17})$$

avec σ , la constante de Stephan-Boltzmann ; n , l'indice de réfraction du milieu ; $\beta = 1/l_p$, le coefficient d'extinction qui est égale à l'inverse du libre parcours moyen. Cette formulation, souvent appelée approximation de Rosseland, est semblable à la loi de Fourier où λ_r joue le rôle d'une conductivité radiative.

- Enfin, dans le cas d'un gaz ou d'un liquide en mouvement, on considère la convection comme mode de transfert qui est l'échange résultant du déplacement et du mélange à températures différentes des parties du fluide. En général la représentation du processus de transfert par convection est difficile, mais si on considère le cas d'échange entre un fluide et une paroi solide qui le limite, un coefficient d'échange superficiel h est introduit par analogie avec les transferts thermiques par conduction. La densité de flux de chaleur sera exprimée comme suit :

$$q'' = h (T_p - T_f) \quad (I.18)$$

avec T_p , la température de la paroi solide [K] et T_f , la température du fluide [K].

I.5 MODELISATION DES TRANSFERTS AU SEIN DE MILIEUX POREUX

La modélisation du transfert de chaleur et de masse au sein des milieux poreux ou fibreux est un sujet difficile. A l'échelle microscopique, ces matériaux ont en effet une structure géométrique complexe. La prédiction des transferts à cette échelle est alors délicate, on a alors recours à des méthodes d'homogénéisation (Bouddour et al., 1998; Whitaker, 1999) afin de remplacer le milieu (à l'échelle microscopique) hétérogène par un milieu homogène équivalent à l'échelle macroscopique.

Pendant les années 20, Lewis et Sherwood (Lewis, 1921) ont proposé une théorie fondée sur la diffusion du liquide pour décrire le séchage. Ils ont considéré que le transport était purement diffusif et s'appuyait sur la loi de Fick avec un coefficient de diffusion constant. Par la suite, Ceaglske et Hougen (Ceaglske and Hougen, 1937) ont démontré le rôle de la capillarité dans le sable (loi de Darcy) et que le transport de l'eau est causé par des gradients de pression dans les solides granulaires.

En 1939, Henry (Henry, 1939) propose une théorie tenant en compte la condensation et l'évaporation pour expliquer la migration de l'eau en phase gazeuse dans le coton.

Néanmoins, ces théories se révèlent insuffisantes, car elles ne sont acceptables que dans des cas particuliers. Ce n'est qu'en 1954 que Rollins, Spangler et Kirhan (Rollins et al., 1954) montrent que les phases liquides et gazeuses interviennent simultanément. C'est à partir de là que Krischer et Kroll (Krischer and Kroll, 1956) et Philip et de Vries (De Vries, 1958) ont développé des modèles mathématiques caractérisant les transferts simultanés de chaleur et de masse dans les milieux poreux.

❖ *Modèle de De Vries*

Le mouvement de l'eau en milieu poreux insaturé est souvent causé par un gradient de température, l'eau s'évapore des régions chaudes et se déplace à travers les pores remplies de gaz par diffusion et se condense sur la région froide qui libère sa chaleur latente de vaporisation. En conséquence, la contribution de la diffusion de la vapeur dans les pores remplis d'air et sa chaleur latente induite doit être intégrée dans la modélisation. On trouve alors comme équations de transfert de masse et de chaleur :

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} = \nabla \cdot ((D_{Tv} + D_{Tl}) \nabla T) + \nabla \cdot ((D_{\theta v} + D_{\theta l}) \nabla \theta_l) \quad (I.19)$$

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot ((\lambda + L_v D_{Tv}) \nabla T) + \nabla \cdot (L_v D_{\theta v} \nabla \theta_l)$$

avec D_{Tv} , D_{Tl} , les coefficients de transport de vapeur et liquide associé à un gradient de température [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]; $D_{\theta v}$, $D_{\theta l}$, les coefficients de transport de vapeur et liquide associés à un gradient de teneur en eau [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]; θ_l , la teneur en eau volumique; λ , la conductivité thermique [$\text{J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$]; C , la capacité calorifique volumique [$\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$] et L_v , la chaleur latente de vaporisation [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$].

En outre, les coefficients de diffusion généralisées D_θ et D_T sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} D_\theta &= D_{\theta v} + D_{\theta l} \\ D_T &= D_{Tv} + D_{Tl} \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Les principaux avantages de l'approche de De Vries peuvent être attribués au fait que les expressions théoriques pour les diffusivités généralisées D_θ et D_T pour le transport de l'humidité due à un gradient d'humidité et à un gradient de température, respectivement, sont disponibles à partir de seulement deux variables indépendantes, la température T et la teneur en eau volumique d'eau θ_l . Cependant, ce modèle sous-estime le flux d'eau d'environ cinq ordres de grandeurs (Bouddour et al., 1998).

❖ *Modèle de Luikov*

Luikov (Luikov, 1975) met en évidence le phénomène de thermo-diffusion, l'effet de la température sur le transfert d'humidité, pour modéliser le transfert couplé de chaleur et de matière dans un milieu poreux.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \nabla \cdot (D(\nabla w + \delta_s \nabla T)) \\ C \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - L_v \epsilon \rho_s \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

où $\epsilon \rho_s \frac{\partial w}{\partial t}$ la variation temporelle locale de la quantité de vapeur condensée; ϵ , le taux de changement de phase; L_v , la chaleur latente de vaporisation; $D = D_L + D_T$, le coefficient de diffusion total; $\delta_s = \frac{D_{VT} + D_{VL}}{D + D_T}$, le coefficient de thermodiffusion et D_{VT} et D_{VL} , les coefficients de thermomigration de la vapeur et de l'eau.

L'inconvénient de ce modèle est la présence du terme de taux de changement de phase ϵ qui n'est pas issu d'une loi physique et la détermination empirique de ce terme est difficile.

❖ *Modèle de Whitaker*

Whitaker (Whitaker, 1998) présente un modèle homogénéisé par prise de moyenne de transfert de masse et de chaleur couplés, pour un phénomène de séchage. Il considère deux approches, une approche microscopique à l'échelle des pores et une deuxième macroscopique à l'échelle du matériau. Whitaker a pris comme hypothèses que le milieu poreux est partiellement saturé, composé de particules rigides et imperméables, l'adsorption à la surface solide-gaz est négligée, et la phase gazeuse est traitée comme un système de pseudo-binaire.

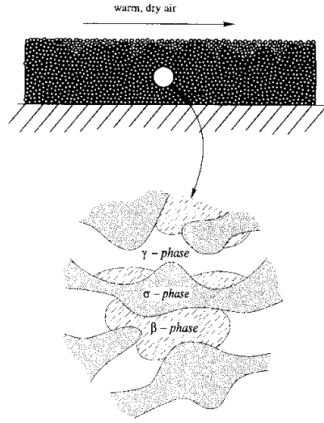


Figure I-25 : Le séchage d'un milieu poreux (Whitaker, 1998).

La Figure I-25 illustre le système de séchage considéré par Whitaker dans lequel l'air chaud et sec circule dans un milieu poreux et humide.

L'équation macroscopique de transfert de chaleur s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle C_p \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = & \underbrace{\nabla \cdot (\lambda_{eff}^0 \cdot \nabla \langle T \rangle)}_{\text{conduction passive}} + \underbrace{\nabla \cdot \left[(\Delta h_{vap} \epsilon_g \mathbf{D}_{eff}) \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \langle T \rangle} \cdot \nabla \langle T \rangle \right) \right]}_{\text{couplage au niveau macroscopique}} \\ & + \underbrace{\nabla \cdot (\lambda_{eff}^{**} \cdot \nabla \langle T \rangle)}_{\text{couplage au niveau de fermeture}} \end{aligned} \quad (I.22)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \lambda_{eff}^{**} = & \lambda_{eff}^* + \mathbf{K}_A \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \langle T \rangle} \cdot \nabla \langle T \rangle \right) + \Delta h_{vap} \epsilon_g \langle \rho_{Ag} \rangle^g \langle T \rangle^{-1} \mathbf{D}_T \\ \text{et } \mathbf{D}_T = & \mathbf{D}_T^* \left(\frac{\langle T \rangle}{\langle \rho_{Ag} \rangle^g} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \langle T \rangle} \right) \end{aligned}$$

Et l'équation macroscopique de transfert de masse s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_g \langle \rho_{Ag} \rangle^g) - \langle \dot{m}_{vap} \rangle = & \underbrace{\nabla \cdot (\epsilon_g \mathbf{D}_{eff}^0 \cdot \langle \rho_{Ag} \rangle^g)}_{\text{diffusion passive}} + \underbrace{\nabla \cdot (\epsilon_g \mathbf{D}_{eff}^* \cdot \langle \rho_{Ag} \rangle^g)}_{\text{diffusion renforcée}} \\ & + \underbrace{\nabla \cdot (\epsilon_g \langle \rho_{Ag} \rangle^g \langle T \rangle^{-1} \mathbf{D}_T \cdot \nabla \langle T \rangle)}_{\text{diffusion thermique multiphase}} \end{aligned} \quad (I.23)$$

où $\langle \rho \rangle = \epsilon_s \rho_s + \epsilon_l \rho_l + \epsilon_g \rho_g$ est la masse volumique moyenne [kg.m^{-3}]; $\langle \rho_{Ag} \rangle^g = \epsilon_g^{-1} \langle \rho_{Ag} \rangle$ est la masse volumique moyenne intrinsèque de l'espèce A dans la phase g, [kg.m^{-3}]; $\langle T \rangle = \epsilon_s \langle T_s \rangle^s + \epsilon_l \langle T_l \rangle^l + \epsilon_g \langle T_g \rangle^g$ est la température moyenne [K]; $\langle \dot{m}_{vap} \rangle$ est le débit massique d'évaporation [$\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-3}$]; λ_{eff}^0 , le tenseur de conductivité thermique effective passive [$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]; λ_{eff}^* , le tenseur de conductivité thermique effective active [$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]; λ_{eff}^{**} représente la contribution globale de la conductivité efficace à cause du couplage au niveau de la fermeture; \mathbf{K}_A , le tenseur multiphasique efficace de Dufour [$\text{kcal.m}^{-2}.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-1}$]; Δh_{vap} , la chaleur de vaporisation par unité de masse [J.kg^{-1}]; \mathcal{F} , une fonction représentant la relation de Clausius Clayperon - Kelvin ;

D_{eff} , le tenseur effective de diffusion [$m^2.s^{-1}$], D_{eff}^* , le tenseur effective de diffusion active [$m^2.s^{-1}$] et D_T^* , le tenseur multiphasique de diffusion thermique efficace [$m^2.s^{-1}$]

Au niveau macroscopique, le couplage entre transfert de masse et de chaleur apparaît naturellement lors du processus de prise de moyenne.

Au niveau microscopique, Whitaker le couplage apparaît quant à lui dans les problèmes de fermeture, qui peuvent être utilisés pour prédire les coefficients effectifs qui apparaissent dans les équations de transfert moyennées.

Le modèle développé est cependant limité en toute rigueur à des températures relativement faibles ($<40^\circ C$), ce qui est un inconvénient pour la modélisation du séchage.

❖ *Modèle de Moyne*

L'approche développée par (Moyne, 1987) permet d'obtenir un modèle homogénéisé couplant la diffusion de la vapeur d'eau au transfert de chaleur conductif. Il suppose d'une part que la phase liquide est immobile et d'autre part que le transfert massique en phase gazeuse a eu lieu uniquement par diffusion. Il obtient après changement d'échelles les équations macroscopiques suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) - \Delta h_v \langle \dot{m} \rangle \\ \rho_g \frac{\partial \langle w_v \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_g D f_{ij} \frac{\partial \langle w_v \rangle^g}{\partial x_j} \right) + \langle \dot{m} \rangle \end{aligned} \quad (I.24)$$

où $\langle T \rangle$ est la température moyenne définie dans le VER [K] ; $\langle w_v \rangle^g$, la moyenne de la fraction massique intrinsèque w_v définie sur la phase gazeuse ; $\langle \dot{m} \rangle$, la masse d'eau qui s'évapore par unité de volume et de temps dans le VER [$kg.m^{-3}.s^{-1}$] ; λ_{ij} , la conductivité thermique [$J.m^{-1}.K^{-1}.s^{-1}$] ; Δh_v , la chaleur latente de vaporisation [$J.kg^{-1}$] ; $\langle \rho C_p \rangle$, la capacité calorifique volumique [$J.m^{-3}.K^{-1}$] et f_{ij} , le facteur de résistance à la diffusion.

Le facteur de résistance f_{ij} a été introduit dans le terme diffusif de la loi de Fick pour tenir compte la présence des phases liquide et solide.

❖ *Modèle de Bouddour*

(Bouddour et al., 1998), en reprenant les calculs de Moyne, présente un modèle en considérant les transports convectifs et conductifs de la chaleur ainsi que la diffusion convective de la vapeur dans la phase gazeuse. Il a utilisée pour cela la technique d'homogénéisation périodique.

Les grandes étapes de l'homogénéisation périodique pour un milieu poreux sont :

- L'écriture des équations de bilan à l'échelle du pore pour chaque phase.
- L'homogénéisation des équations microscopiques des différents processus en présence, ce qui permet d'obtenir le comportement macroscopique équivalent du milieu poreux, suivant les ordres de grandeurs relatifs.
- La détermination du domaine de validité des différentes descriptions macroscopiques obtenues et des coefficients effectifs associés.

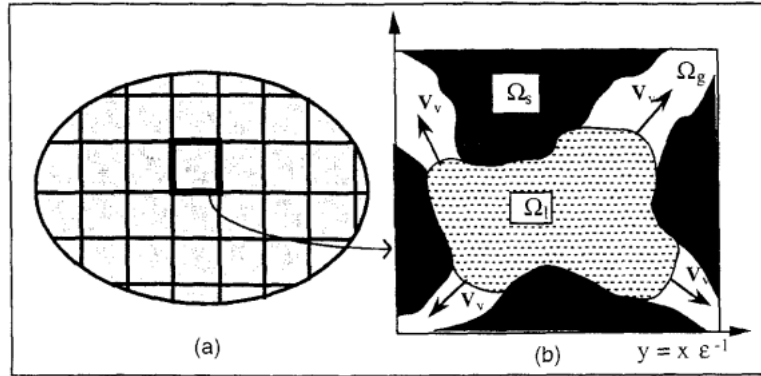


Figure I-26 : Vue a) macroscopique et b) microscopique du milieu périodique insaturé (Bouddour et al., 1998).

Bouddour considère un milieu périodique dans l'espace Ω (Figure I-26). La phase solide Ω_s est supposée rigide et la phase gazeuse Ω_g est considérée un mélange de deux composants l'air et la vapeur. Il néglige le transfert de chaleur par rayonnement, et considère qu'il n'y a pas d'interaction entre solide et les fluides.

En fonction des ordres de grandeurs de certains nombres adimensionnels, on distingue quatre modèles macroscopiques de transfert de masse, ainsi que quatre modèles de transferts de chaleur. L'effet de couplage entre les deux modes de transfert apparaît dans des termes de changement de phase.

Les deux équations générales de transfert de masse en phase vapeur et de transfert d'énergie sont présentées par la suite.

Le modèle macroscopique de diffusion-convection en présence d'évaporation-condensation obtenu au premier ordre du développement asymptotique des équations est présenté comme suit :

$$n_g \rho_g^0 \frac{\partial w_v^0}{\partial t} + \rho_g^0 v_{gi}^{0eff} \frac{\partial w_v^0}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij}^* \rho_g^0 \frac{\partial w_v^0}{\partial x_j} \right) + \rho_a^0 q_v \Gamma_{gl} = 0$$

$$\text{tel que : } D_{ij}^* = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_g} D \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial y_j} + I_{ij} \right) d\Omega \quad (I.25)$$

où w_v^0 est la fraction massique intrinsèque définie sur la phase gazeuse au premier ordre ; ρ_g^0 , la masse volumique du gaz ; ρ_a^0 , la masse volumique de l'air ; v_{gi}^{0eff} , le champs de vitesse du mélange gazeux (relié à la loi de Darcy) ; $q_v \Gamma_{gl}$ qui est un terme source de vapeur défini comme une moyenne de volume ; $n_g = \frac{\Omega_g}{|\Omega|}$, la porosité de la phase gazeuse ; D_{ij}^* , le tenseur macroscopique de diffusion ; D , le coefficient de diffusion air-vapeur et ξ , un champ de vecteur, solution d'un problème aux limites linéaire local défini sur la cellule élémentaire.

Le modèle macroscopique de général de conduction-convection avec évaporation-condensation est présenté comme suit :

$$\begin{aligned} (n_s(\rho C_p)_s + n_l(\rho C_p)_l) \frac{\partial T^0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\lambda_{sij}^* + \lambda_{lij}^*) \frac{\partial T^0}{\partial x_j} \right] + (\rho C_p)_l v_{gi}^{0eff} \frac{\partial T^0}{\partial x_j} - L_v \rho_a^0 q_v \Gamma_{gl} = 0 \\ \text{tel que : } \lambda_{\delta ij}^* = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_\delta} D \left(\frac{\partial \chi_{\delta j}}{\partial y_j} + I_{ij} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (I.26)$$

où T^0 est le champ de température ; n_s et n_l , les fractions volumiques des phases solide et liquide ; $(\rho C_p)_s$ et $(\rho C_p)_l$, les capacités calorifiques par unité de volume des phases solide et liquide ; v_{gi}^{0eff} , le champ de vitesse du liquide (lié à la loi de Darcy) ; L_v , la chaleur latente de vaporisation ; $\lambda_{\delta ij}^*$, le tenseur macroscopique de conductivité de la phase δ et $\chi_{\delta j}$, une solution d'un problème aux limites local.

Le couplage entre les deux équations de transfert de chaleur et de masse se révèle à travers le terme de changement de phase $q_v \Gamma_{gl}$, qui apparaît dans les deux équations.

Les autres modèles développés correspondent à des modes de transferts prédominants (diffusion, convection). La méthode d'homogénéisation périodique permet ainsi d'obtenir différentes équations macroscopiques qui décrivent les transferts couplés de chaleur et de masse, suivant les ordres de grandeur des nombres adimensionnels contrôlant le comportement à l'échelle macroscopique.

Par contre, ces modèles ne permettent pas de décrire précisément l'écoulement du liquide, car la teneur en eau du liquide n'apparaît pas explicitement dans les équations.

❖ *Modèle de Perré*

Perré et al. (Perré and Turner (2002)) ont développé un modèle de séchage à deux dimensions, pour étudier le transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux particulier, le bois. Le bois est un matériau poreux anisotrope et hétérogène avec une structure assez complexe. L'épaisseur de la paroi de la cellule varie considérablement ainsi que la densité suivant l'âge de la plante. Suite à ces variations, les propriétés physiques dépendent fortement du cycle annuel de la plante et par suite cette variation de densité a été prise en considération lors de l'élaboration du modèle mathématique décrivant le séchage du bois.

Ce modèle s'est basé sur le travail de Whitaker pour décrire les équations macroscopiques qui régissent le transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux homogène. Le modèle est adapté pour tenir compte de l'hétérogénéité du matériau à travers la densité apparente du milieu poreux $\rho_0(x)$ et par la variation de la densité des propriétés du matériau, la pression capillaire, la perméabilité, la diffusivité et la conductivité. Le modèle mathématique est résumé brièvement comme suit.

L'équation de conservation du liquide :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0(x) X + \epsilon_g \rho_v) + \nabla \cdot (\rho_l \bar{v}_l + \rho_v \bar{v}_g + \overline{\rho_b v_b}) = \nabla \cdot (\rho_g \bar{\bar{D}}_{eff} \nabla w_v) \quad (I.27)$$

L'équation de conservation de l'air :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_a) + \nabla \cdot (\rho_a \bar{v}_g) = \nabla \cdot (\rho_g \bar{\bar{D}}_{eff} \nabla w_a) \quad (I.28)$$

L'équation de conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0(x)(Xh_w + h_s) + \epsilon_g(\rho_v h_v + \rho_a h_a) - \int_0^{\bar{\rho}_b} \Delta h_l d\rho - \epsilon_g P_g \right) + \\ \nabla \cdot (\rho_l h_l \bar{v}_l + (\rho_v h_v + \rho_a h_a) \bar{v}_g + h_b \bar{\rho}_b \bar{v}_b) = \nabla \cdot (\bar{\rho}_g \bar{\bar{D}}_{eff} (h_v \nabla w_v + h_v \nabla w_a) + \bar{\bar{K}}_{eff} \nabla T) \end{aligned} \quad (I.29)$$

Les vitesses des phases liquides et gaz sont données par la loi de Darcy généralisée :

$$\bar{v}_x = - \frac{\bar{\bar{K}}_x \bar{\bar{K}}_x}{\mu_x} \nabla \varphi_x \quad (I.30)$$

$$\text{Et } \nabla \varphi_x = \nabla P_x - \rho_x g \nabla \chi \text{ où } x = w, g$$

où ϵ_g est la fraction volumique de la phase gazeuse ; ρ_l, ρ_v, ρ_g , les masses volumiques intrinsèques des phases liquide, vapeur et gazeuse ; ρ_a, ρ_b , les masses volumiques intrinsèques de l'air et de l'eau liée ; χ , le scalaire de profondeur ; φ , le potentiel des phases ; w , la fraction massique des phases ; X , la teneur en humidité à base sèche ; $\bar{\bar{D}}_{eff}$, le tenseur de diffusion effective et $\bar{\bar{K}}$, le tenseur cinétique de transport.

Le flux du liquide lié est supposé être proportionnel à un gradient dans la teneur en humidité de l'eau liée : $\bar{\rho}_b \bar{v}_b = -\rho_0(x) \bar{\bar{D}}_b \nabla X_b$

Ce modèle permet de prendre en considération à la fois l'anisotropie du matériau et les propriétés de transfert en fonction de la densité et de suivre le comportement de la température interne, de la teneur en humidité et de la pression au cours du processus de séchage.

Par contre, un tel modèle global est très exigeant en termes de ressources informatiques (temps CPU et mémoire), sauf si un ensemble de techniques numériques sophistiquées est mis en œuvre pour assurer à la fois des résultats de simulation précis et efficaces.

I.6 CONCLUSION

Comme mentionné précédemment, il existe dans la littérature de nombreux modèles de transfert de chaleur et de masse au sein des milieux poreux saturés et partiellement saturés. Cependant, la plupart de ces modèles phénoménologiques ne proposent pas une formulation explicite de certains paramètres (conductivité, diffusivité, etc.) en fonction de la microstructure du matériau. C'est pourquoi on utilise généralement des résultats expérimentaux afin de déterminer ou d'identifier les paramètres intervenant dans le calcul des propriétés macroscopiques de transfert comme le coefficient de diffusion hydrique (Zaknoute et al., 2013).

Comme nous l'avons précisé dans ce chapitre, la fibre de chanvre est un milieu hygroscopique, anisotrope, poreux présentant une forte variabilité. Une description fine et complète de la microstructure ainsi que des phénomènes physiques mis en jeu à l'échelle microscopique est nécessaire afin de pouvoir obtenir ensuite, par des méthodes de changement d'échelle par exemple, le comportement de la fibre de chanvre puis d'un ensemble de fibres entrelacées.

Chapitre II.

CARACTERISATION DE LA STRUCTURE

PAR ANALYSE D'IMAGES

II.1 INTRODUCTION

Les propriétés mécaniques et thermiques des isolants fibreux étudiés dépendent principalement de la densité et de l'organisation de la structure fibreuse (anisotropie, nombre et types de contact entre les fibres, longueur des fibres, tortuosité, etc.), qui sont fonction du process de fabrication. La caractérisation de la microstructure constitue ainsi une première étape d'une démarche d'optimisation ayant pour objectif de comprendre le lien entre process et propriétés. Dans de ce chapitre, la structure fibreuse et l'espace porale du matériau sont étudiés grâce à des techniques d'imagerie 2D (microscopie électronique à balayage MEB) et 3D (tomographie aux rayons X). Des outils d'analyse d'images basés notamment sur la morphologie mathématique sont ensuite utilisés afin de caractériser quantitativement divers aspects de la microstructure (taille des pores, diamètres de fibres, orientations, porosité, etc.). Outre l'aspect caractérisation, ces données sont indispensables pour vérifier s'il existe un volume élémentaire représentatif (VER) et déterminer sa taille. Enfin, les images 3D pourront servir de support pour le calcul des propriétés hygrothermiques macroscopiques par résolution numérique des problèmes de fermeture décrits dans le chapitre précédent.

Les isolants non-tissés, tels que la laine de chanvre étudiée dans ce travail, présentent une structure fibreuse enchevêtrée et tridimensionnelle très complexe. Les fibres sont d'abord orientées de manière aléatoire, mais le processus de consolidation crée une orientation privilégiée dans les plans transversaux (c.-à-d. perpendiculaires à l'épaisseur de l'isolant). Pourtant, une vue macroscopique du panneau de fibres (Figure II-1) indique une certaine dispersion des orientations des fibres. On peut estimer que la plupart des fibres ont une orientation qui forme un angle compris entre -45° et $+45^\circ$ avec les plans transversaux.



Figure II-1 : Vue macroscopique de la laine de chanvre.

II.2 TECHNIQUES DE CARACTERISATION DES MILIEUX POREUX

Plusieurs techniques expérimentales permettent de caractériser finement la structure des matériaux poreux, mais leur application peut être limitée soit par leur mise en pratique (difficulté de mise en œuvre, préparation de l'échantillon, etc.), soit par la

mesure elle-même (résolution, échelle...). Chacune de ces techniques apporte une compréhension de certains aspects de la structure (porosité, surface spécifique, distribution de tailles de pores...) et limitée à certaines échelles (Figure II-2). D'où l'intérêt de combiner différentes techniques pour obtenir une caractérisation plus fine des matériaux.

Dans ce chapitre, la microscopie électronique à balayage est utilisée pour obtenir des informations qualitatives sur les fibres et notamment sur la morphologie des fibres de chanvre, ce qui nécessite des résolutions assez fines, puisque les dimensions caractéristiques des lumens peuvent être de l'ordre de la centaine de nanomètres. L'utilisation d'images obtenues par microtomographie par rayon X permet quant à elle une caractérisation 3D plus quantitative du réseau fibreux sur des volumes de mesure de l'ordre du centimètre.

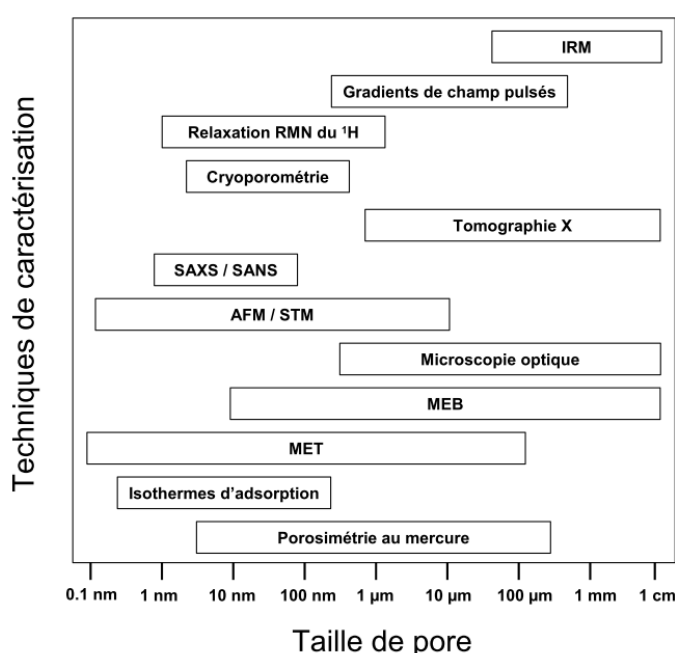


Figure II-2 : Principales techniques de caractérisation des milieux poreux.

Dans ce travail, les techniques d'imagerie par microscopie électronique à balayage et par tomographie X ont été utilisées.

II.3 ACQUISITION ET TRAITEMENT DES IMAGES

II.3.1 Microscopie électronique à balayage

❖ Principe du MEB

La microscopie électronique à balayage (MEB ou « Scanning Electron Microscopy » SEM) est une technique d'observation de la microstructure des surfaces.

Cette technique est basée sur la détection du déplacement des électrons primaires envoyé par un faisceau sur toute la surface et des électrons secondaires émergents de cette surface. Le faisceau d'électrons généré traverse l'échantillon. Cela produit une

interaction entre les électrons incidents et la matière qui va générer l'émission d'électrons d'énergies différentes, de rayons X et de luminescence (Figure II-3)

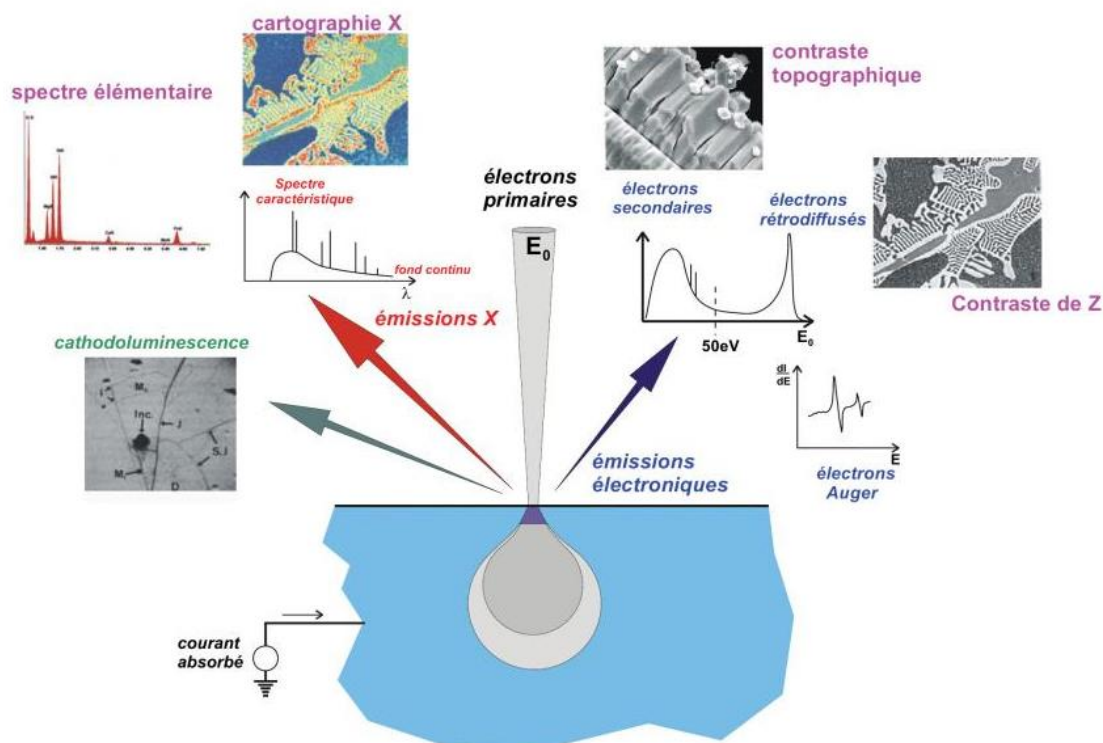


Figure II-3 : Principales émissions électroniques et électromagnétiques dues aux interactions d'un faisceau d'électrons avec un échantillon (Brisset, 2008).

Les principales émissions électroniques et électromagnétiques dues aux interactions d'un faisceau d'électrons avec un échantillon sont présentées dans la Figure II-3. On distingue deux principaux types d'électrons analysés.

Les électrons secondaires

Il s'agit des électrons issus de l'interaction inélastique des atomes de l'échantillon sous l'effet des électrons incidents. Ces électrons secondaires ont une faible énergie cinétique de quelques électrons volts. De ce fait, ils sont émis près de la surface et très sensibles à la topographie de l'échantillon. L'analyse de ces électrons permet ainsi de mettre en évidence les contrastes de relief (Figure II-4-a).

Les électrons rétrodiffusés

Ces électrons proviennent de l'attraction due au passage au voisinage du noyau atomique, ce qui conduit à l'émission d'un électron n'ayant subi qu'un nombre limité de chocs élastiques ou quasi élastiques, avec une énergie comprise entre 0 et E_0 .

La détection des électrons rétrodiffusés permet de mettre en évidence la répartition des différences des numéros atomiques. Ce qui permet d'analyser les fibres de même nature chimique (Figure II-4-b).

❖ Analyse des images MEB

L'échantillon de laine de chanvre a été étudié par MEB en mode environnemental. Deux types de capteurs, l'un permettant d'analyser les électrons secondaires et le second

permettant d'analyser les électrons rétrodiffusés, ont été utilisés. Les Figure II-4-**a** et **b** présentent une vue d'ensemble du réseau fibreux obtenue par électrons secondaires et rétrodiffusés respectivement. On pourra noter que dans notre cas, les deux méthodes d'acquisition ne présentent pas d'intérêt particulier (du point de vue visualisation) l'une par rapport à l'autre. Nous présenterons dans la suite uniquement les images des électrons rétrodiffusés, qui sont un peu plus nettes.

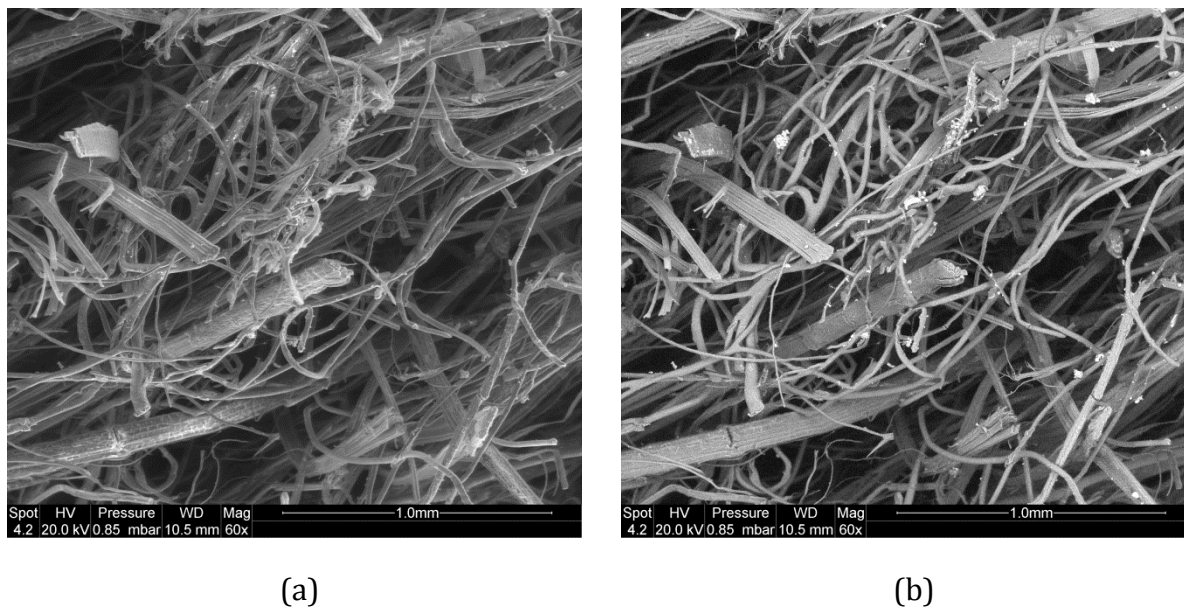


Figure II-4 : Visualisation d'ensemble du réseau de fibres par électrons secondaire (a) et rétrodiffusés (b).

Cette série d'images présente des vues à grande échelle de l'isolant, qui illustrent très bien la complexité de la structure fibreuse et l'hétérogénéité du matériau. Les fibres polymères sont facilement identifiables par leur petite taille, leur section isotrope, leur surface lisse ainsi que leur tortuosité plus importante que les fibres végétales.

La série d'images, Figure II-5-a à Figure II-5-d, présente quant à elle des vues depuis l'échelle du réseau (Figure II-5-a) jusqu'à l'échelle de la fibre de chanvre (Figure II-5-d). On peut observer que les fibres de chanvre sont de dimensions très variables et présentent une section qui peut être fortement anisotrope. Un zoom sur la section d'une fibre (Figure II-5-c et d) nous renseigne sur la structure interne des fibres de chanvre. On constate que les fibres libériennes qui composent notre laine de chanvre sont constituées d'un nombre variable de cellules élémentaires, ce qui explique les variations de diamètres observées (d'environ 20 μm à 100 μm pour le petit axe de la section). Les lumens des cellules élémentaires sont très étroits et leur plus petite dimension varie de quelques micromètres à moins de 500 nm (Figure II-5-d). Ces observations sont en accord avec les données de la littérature (Placet et al., 2014, 2012). Vu la grande variabilité des dimensions des fibres déjà évoquée dans le chapitre 1, il est ici important de connaître les gammes de taille caractéristique de notre matériau. On notera que ces faibles dimensions peuvent impliquer un régime de diffusion de vapeur dans les lumens intermédiaires entre le régime collisionnel et le régime de Knudsen. Enfin, on observe l'aspect caractéristique de la surface des fibres de chanvre dans la Figure II-5-b, qui les distingue très nettement des fibres polymères très lisses.

On notera que, du fait de la faible proportion de chènevottes présentes dans le matériau, il n'a pas été possible d'en observer lors de la séance d'acquisition. Ces fibres de grande taille pourront cependant être visualisées et étudiées par tomographie dans la section suivante.

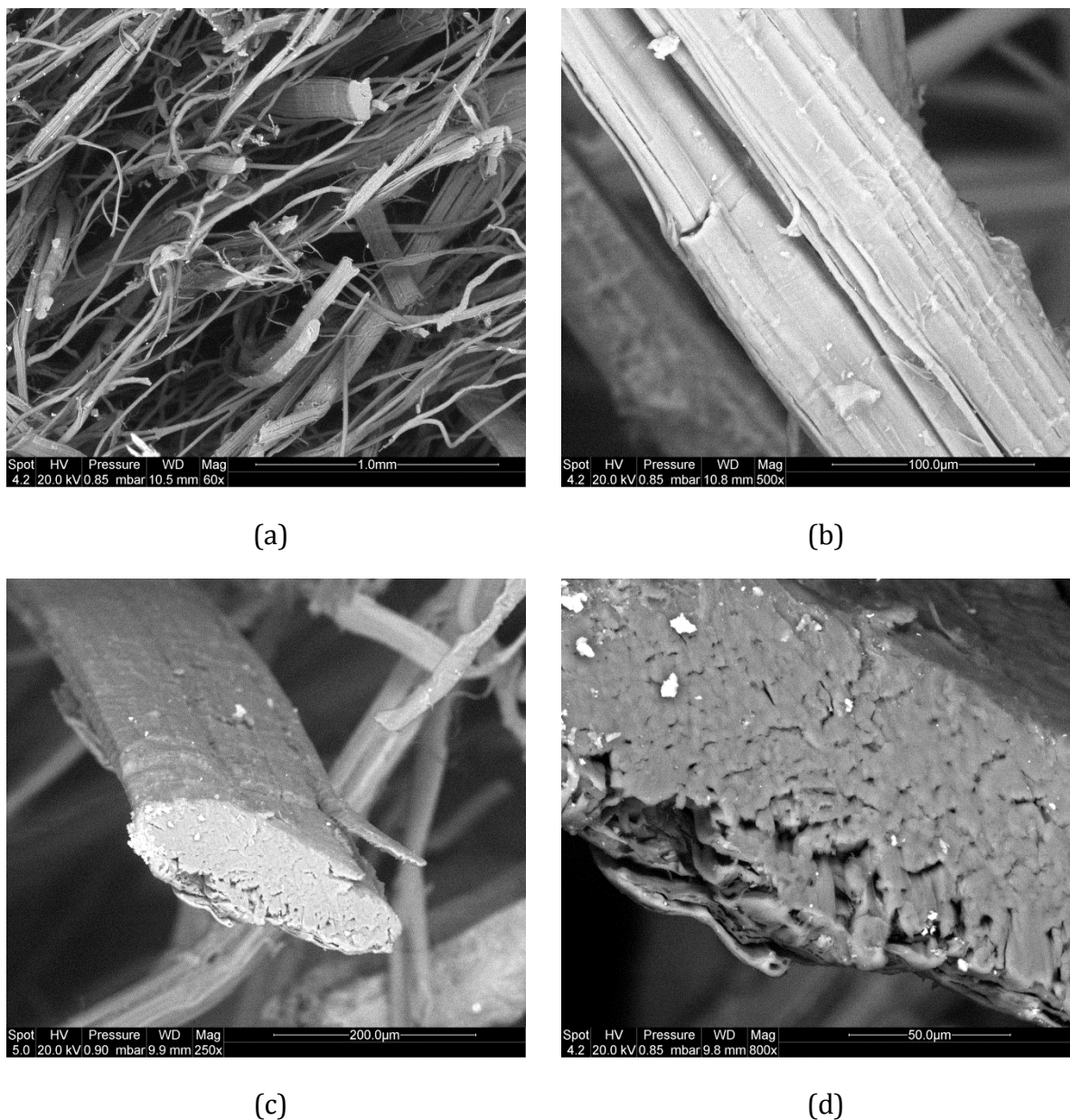


Figure II-5 : Images MEB à différentes échelles : réseau de fibres (a), surface des fibres de chanvre (b), fibre de chanvre (c) et zoom sur la section d'une fibre de chanvre (d).

L'analyse MEB permet une première caractérisation qualitative de l'isolant de l'échelle du réseau de fibres jusqu'à l'échelle de la fibre individuelle. En particulier, la structure interne de la fibre et la dimension des lumens ont pu être analysées.

II.3.2 Élément d'analyse d'images

En sciences des matériaux, l'analyse d'images vise à extraire d'une image (généralement 2D ou 3D) des informations relatives aux différentes phases du matériau étudié, afin d'en caractériser certains aspects. On cherchera par exemple à identifier les différentes phases et à en mesurer les fractions volumiques, les dimensions caractéristiques ou encore leur répartition spatiale, à dénombrer et caractériser la géométrie des objets présents, etc. Les principales techniques utilisées pour ce faire sont basées soit sur une approche linéaire (issus du traitement du signal), soit sur une approche non-linéaire, dont fait partie la morphologie mathématique (Matheron, 1967; Serra, 1982). Cette dernière approche a été développée pour l'étude de la forme et de la taille des objets et fournit de nombreux outils de traitement, de mesure et de segmentation d'image. Le principe de base de la morphologie mathématique consiste à utiliser un ensemble de forme et taille connu, que l'on appelle élément structurant, afin de sonder l'ensemble étudié, qui peut être par exemple l'ensemble formé par les pixels blancs d'une image binaire. L'élément structurant parcourt chaque pixel de l'image et une image transformée est générée par la réponse à un test booléen simple, par exemple « l'élément structurant est-il inclus dans l'ensemble étudié ? », ou « l'intersection de l'élément structurant avec l'ensemble étudié est-elle non nulle ? ».

Les opérations de base sont la dilatation et l'érosion dont on donne ici les définitions dans le cas binaire, tout en sachant qu'elles s'étendent sans difficulté aux images en niveaux de gris.

Soit X un ensemble inclus dans E , l'ensemble des parties de \mathbb{R}^n (souvent $n = 2$ ou 3), on définit le transposé de X , noté \check{X} par :

$$\check{X} = \{-x, x \in X\} \quad (\text{II.1})$$

et le translaté de X par b , noté X_b par :

$$X_b = \{x + b, x \in X\} \quad (\text{II.2})$$

La dilatation d'un ensemble X notée $\delta_B(X)$, est définie comme étant le lieu géométrique des points B_x lorsque x parcourt l'ensemble X (c.-à-d. lorsque l'intersection entre B_x et X est non nulle) :

$$\delta_B(x) = \bigcup_{b \in B} X_{-b} = \{b : B_b \cap X \neq \emptyset\} \quad (\text{II.3})$$

L'érosion d'un ensemble X par un élément structurant B , notée ϵ_B est définie de manière duale à la dilatation comme étant le lieu des points B_x tel que l'ensemble B_x soit inclus dans X :

$$\epsilon_B(x) = \bigcap_{b \in B} X_{-b} = \{b : B_b \subseteq X\} \quad (\text{II.4})$$

Les effets de ces deux opérations sur un ensemble simple (Figure II-6-a) sont illustrés sur les Figure II-6-b et Figure II-6-c.

Des opérations plus complexes peuvent ensuite être construites par composition de ces opérations de base. Des opérateurs particulièrement intéressants pour mesurer la taille des objets sont l'ouverture et la fermeture morphologique. L'ouverture est la composition d'une érosion suivie d'une dilatation. C'est une opération idempotente qui permet de supprimer de l'image toutes les parties de X qui ne contiennent pas l'élément structurant. Une mesure du nombre de pixels après une ouverture permet donc de connaître la fraction volumique de X de dimensions plus petites que l'élément structurant. On comprend alors que l'application successive d'ouvertures de taille croissante et la mesure du nombre de pixels restant après chaque opération permettent de réaliser une mesure de la distribution de la taille des parties de l'ensemble X . C'est le principe de la granulométrie par ouverture, qui sera utilisée dans ce travail afin de mesurer la distribution du diamètre de fibres ainsi que la distribution de la taille des pores.

La fermeture est définie de manière analogue comme la composition d'une dilatation suivie d'une érosion. Elle joue le même rôle que l'ouverture, mais sur l'ensemble complémentaire X^c .

Les résultats d'une ouverture et d'une fermeture sont illustrés sur les Figure II-6-d et Figure II-6-e.

Les granulométries sont généralement réalisées au moyen d'éléments structurants symétriques, mais l'utilisation d'ensembles comme des segments de droite peut par exemple permettre de caractériser l'anisotropie des matériaux. Cela sera mis à profit dans ce chapitre pour le calcul des orientations locales des fibres.

Les autres concepts mis en œuvre dans les outils utilisés pour cette thèse ne seront pas développés ici, mais le lecteur pourra se référer à la très riche littérature à ce sujet (Vachier, 2001; Meyer and Beucher, 1990; Serra, 1982).

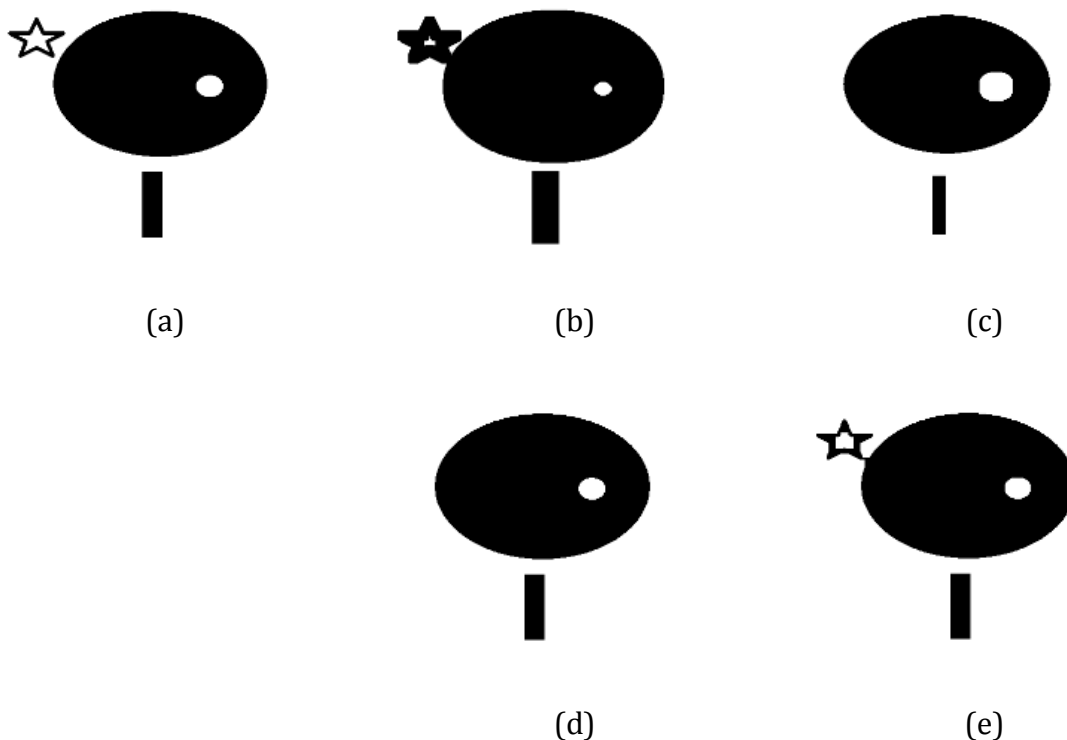


Figure II-6 : Illustration de différentes opérations morphologiques par un élément structurant (disque de diamètre 10 pixels) sur une image binaire (a). Résultats d'une dilatation (b), d'une érosion (c), d'une ouverture (d) et d'une fermeture (e).

II.3.3 Tomographie X

❖ Principe de la tomographie par rayon X

La tomographie par absorption de rayons X est une technique non destructive permettant la reconstruction tridimensionnelle de l'objet étudié. L'objet à analyser est placé entre une source de rayons X et un détecteur, généralement une caméra CCD. Le détecteur enregistre le spectre d'atténuation après le passage du rayonnement dans le matériau. Ces acquisitions sont répétées pour un grand nombre de positions angulaires de l'échantillon étudié (Figure II-7). L'ensemble de ces projections d'atténuation constitue la transformée de Radon de la distribution volumique de l'atténuation. Le champ d'atténuation tridimensionnel peut alors être obtenu par transformation inverse, ce qui permet de visualiser la répartition des phases présentant des absorptions différentes au sein de l'échantillon. Pour des raisons pratiques, les données mesurées, qui sont généralement stockées en réel sur 32 bits, doivent être converties en entier (le plus souvent en entier non signé sur 8 bits, soit de 0 à 255). Cette opération doit être pratiquée avec beaucoup d'attention afin de conserver au mieux la dynamique des niveaux de gris de l'image, particulièrement dans le cas où les coefficients d'absorption des phases sont proches.

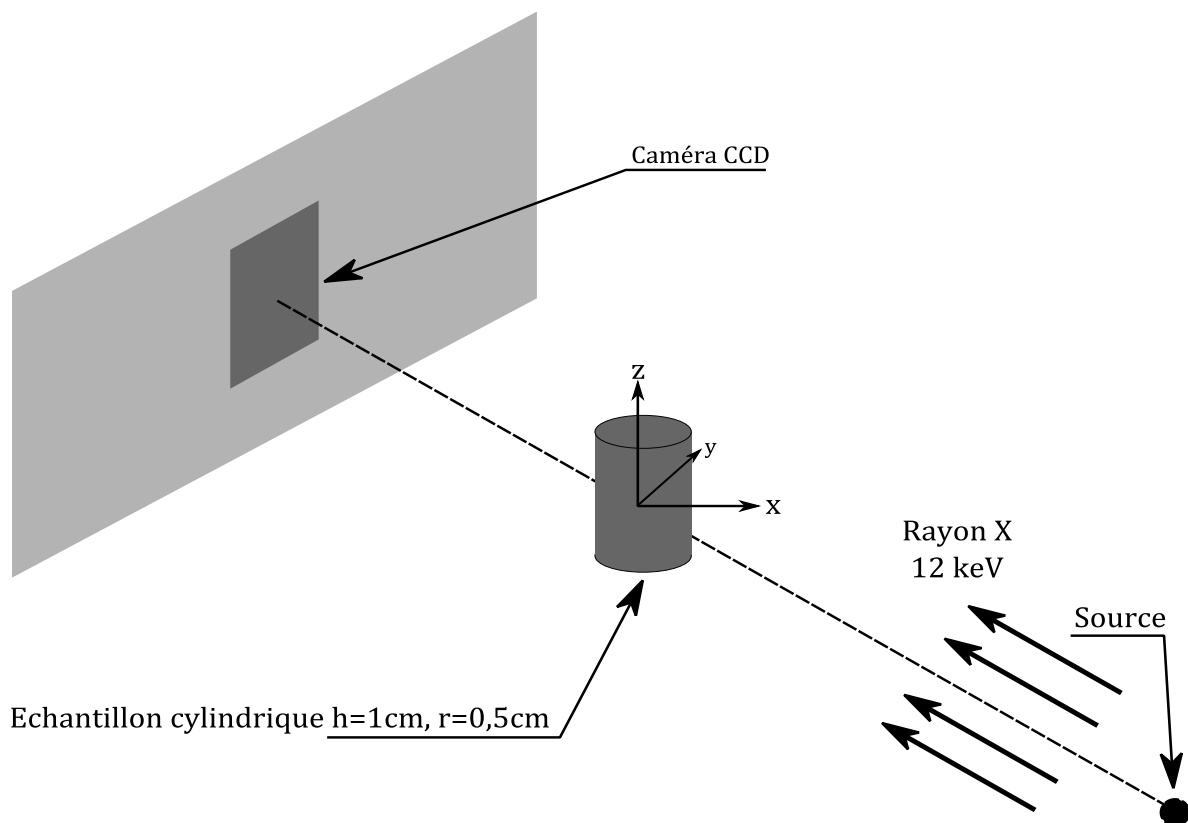


Figure II-7 : Dispositif d'acquisition d'images par tomographie.

❖ Préparation des échantillons et acquisition des images

L'acquisition des images tomographiques a été réalisée à l'I2M de Bordeaux. Des échantillons cylindriques de diamètre 1,75 mm et de hauteur 12 mm environ ont été découpés avec soin dans les panneaux de chanvre. Il convient de noter que la préparation de ces échantillons est particulièrement délicate. Une première découpe grossière est tout d'abord réalisée avec un massicot, ce qui peut engendrer un léger tassement du matériau et une modification de l'arrangement des fibres au niveau de la lame. Une découpe fine est ensuite pratiquée à l'aide de ciseaux à tôle afin de donner une forme cylindrique aux échantillons et également de limiter les effets de la première découpe. Malgré tout le soin apporté à ces opérations de découpe, il est tout de même possible que la microstructure du matériau ait été légèrement modifiée lors de la préparation.

Afin de travailler sur un volume suffisamment important, mais aussi de visualiser les petites fibres de polymère, la résolution de l'acquisition est fixée à $8\text{ }\mu\text{m/voxel}$. Les dimensions de l'ensemble du volume balayé sont $2121 \times 2206 \times 1500$ voxels (environ $17 \times 17,6 \times 12\text{ mm}^3$). Cependant, une image plus petite de dimensions $1200 \times 1200 \times 900$ voxels (soit environ $9,6 \times 9,6 \times 7,2\text{ mm}^3$) est extraite du noyau de l'échantillon afin d'éviter les modifications de surface du fait de la préparation de l'échantillon et de la découpe. Pour des raisons de mémoire et de temps de calcul, un certain nombre de mesures sont réalisées sur des images dont la résolution a été réduite à $16\text{ }\mu\text{m/voxel}$.

Une attention toute particulière a été portée à la préservation des composantes connexes des fibres lors de cette opération de *downsampling* (sous-échantillonnage).

❖ Filtrage et seuillage des images

Un filtrage par diffusion anisotrope (Perona and Malik, 1990) est tout d'abord appliqué à l'image en niveaux de gris afin de diminuer le bruit et de renforcer le contraste. La bonne qualité de l'image permet ensuite d'identifier la phase fibreuse par un simple seuillage. À l'issue de cette binarisation, les amas de voxels de petite taille, assimilable à du bruit, sont finalement supprimés. Les Figure II-8-a et b illustrent le processus de filtrage et seuillage sur une coupe transversale de l'échantillon. À noter qu'il n'est pas possible de distinguer les fibres polymères des fibres de chanvre sur la base de leur niveau de gris. Cette segmentation sera réalisée ultérieurement sur des critères morphologiques.

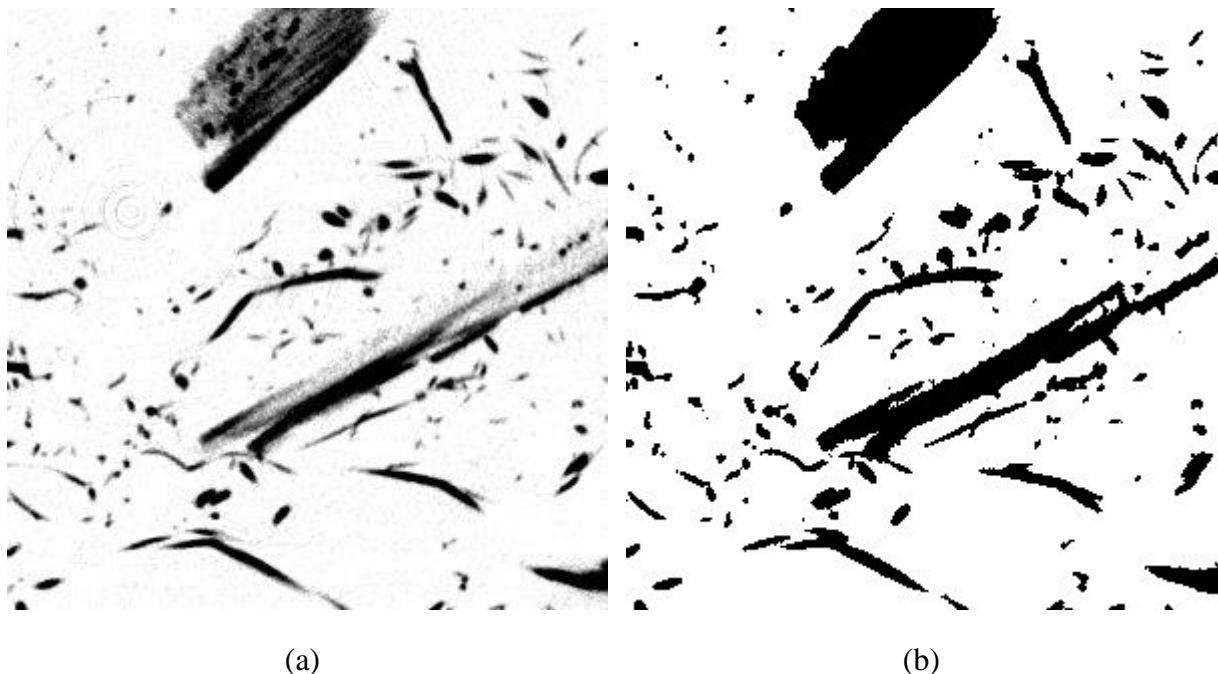


Figure II-8 : (a) coupe transversale de l'image tomographique ; (b) image binaire finale après seuillage et filtrage.

Une vue 3D d'un sous-volume de $4,8 \times 4,8 \times 2,4$ est présentée sur la Figure II-9. Cette image illustre la complexité du réseau fibreux, qui forme une structure très entrelacée, avec des fibres tortueuses de tailles très différentes. L'axe z est orienté selon l'épaisseur du panneau de fibres et par conséquent, les plans xOy correspondent aux plans transversaux.

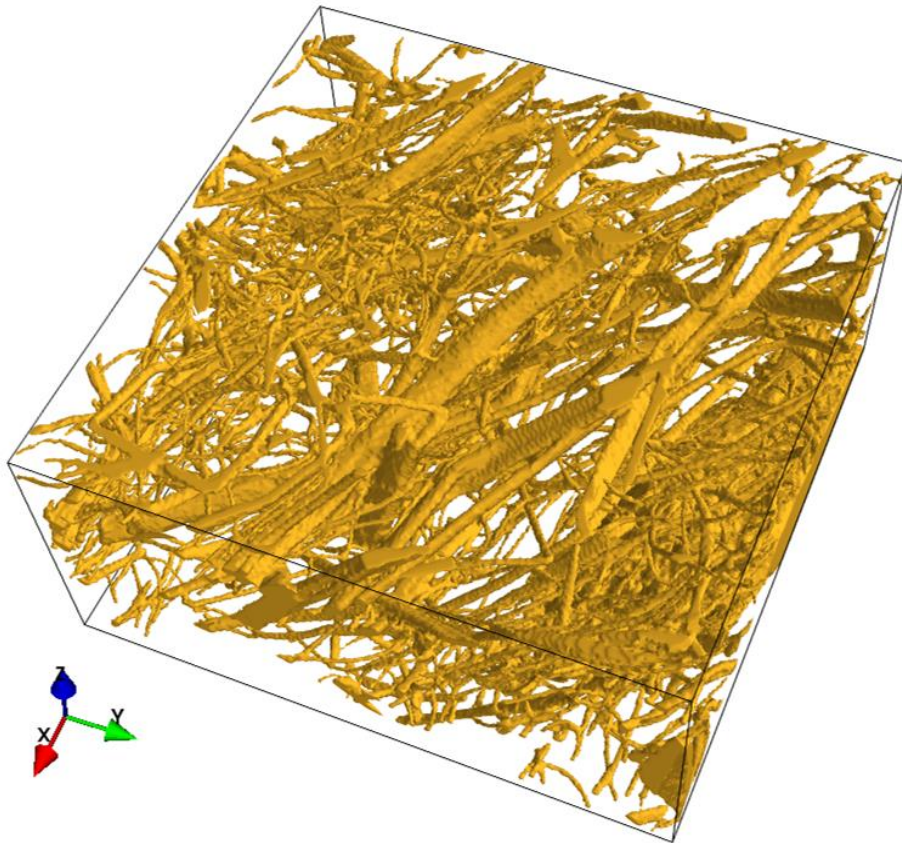


Figure II-9 : Visualisation d'un volume de $4,8 \times 4,8 \times 2,4$ extrait de l'image binaire complète.

II.3.4 Volume élémentaire représentatif

Le volume élémentaire représentatif (VER) joue un rôle central dans l'étude des matériaux hétérogènes. De nombreuses méthodes de changement d'échelle, dont la prise de moyenne, se basent sur l'existence d'un tel volume afin de dériver les équations à l'échelle du milieu homogénéisé. La définition du VER est souvent purement géométrique ; le VER est alors le volume le plus petit à partir duquel les caractéristiques géométriques mesurées ne varient plus. À noter que l'on parle ici des variations des propriétés en fonction de la taille du volume, mais aussi en fonction de la localisation du VER dans le matériau. Ces conditions peuvent toutefois être relaxées dans le cas de la prise de moyenne, comme le montrent Luévano-Rivas et Valdés-Parada (2015) dans un cas où le matériau présente un gradient de porosité.

Le paramètre le plus souvent utilisé pour définir un VER géométrique est la porosité, ce qui est bien entendu clairement insuffisant dans le cas de matériaux présentant de fortes anisotropies comme les matériaux fibreux étudiés ici. Pour ce type de matériaux, on pourra se référer au travail de Lux, 2005 pour une étude des différents indicateurs structuraux nécessaires à la détermination d'un VER géométrique (orientation des fibres, longueurs de corrélation, distribution de taille des fibres et des pores, etc.).

Cela dit, l'approche purement géométrique du VER se révèle en réalité insuffisante dans l'étude des phénomènes de transfert. Les contraintes de taille évoluent en effet avec le

type de phénomène physique considéré, mais aussi avec les propriétés locales, notamment dans le cas de fort contraste (Ahmadi and Quintard, 1996). Il n'existe donc pas un VER, mais des VER en fonction des phénomènes étudiés.

Dans le cas de milieux fibreux aléatoires, Dirrenberger et al. (2014) a montré que la taille du VER peut devenir très importante, ce qui est réellement rédhibitoire en terme de mémoire et de temps de calcul pour la réalisation de mesures sur l'image ou la prédiction de propriétés effectives. Une approche plus pratique permettant de contourner ce problème a été proposée par Kanit et al., (2003) pour des matériaux pouvant être assimilés à une réalisation d'un processus aléatoire. Dans ce cas, il est possible de calculer l'erreur commise sur la mesure d'une propriété Z en réalisant les mesures sur n réalisations de taille donnée. L'erreur absolue sur la valeur moyenne mesurée pour n réalisations indépendantes de volume V s'écrit :

$$\epsilon_{abs} = \frac{2D_Z(V)}{\sqrt{n}} \quad (II.5)$$

Où $D_Z(V)$ est la variance de Z mesurée dans les n volumes.

L'erreur relative ϵ_{rela} est :

$$\epsilon_{rela} = \frac{\epsilon_{abs}}{Z} = \frac{2D_Z(V)}{Z\sqrt{n}} \quad (II.6)$$

La taille du VER peut ainsi être définie comme le volume à partir duquel la variance – et donc l'erreur – s'annule. Une seule réalisation est alors nécessaire pour mesurer la propriété Z . Dans la pratique, si V est trop grand, on peut choisir de travailler sur des volumes de tailles réduites. La mesure de la variance permet alors de déterminer l'intervalle de confiance sur la mesure de la propriété considérée.

Comme nous l'avons déjà mentionné auparavant, la laine de chanvre étudié contient des fibres dont la longueur peut être de taille similaire à celle de l'échantillon étudié. De plus les chènevottes constituent des hétérogénéités de taille importante, car le grand axe de leur section peut être de l'ordre de plusieurs millimètres. Il n'est donc pas certain que l'image complète puisse être considérée comme un VER. Afin de vérifier s'il est possible d'extraire un VER géométrique de notre image, la porosité est mesurée dans des volumes de tailles croissantes centrées à différent endroit de l'image. La Figure II-10 montre les résultats pour quatre localisations différentes. On observe que la porosité peut être très différente selon la position du volume de mesure considéré dans l'image, et ce, même pour des volumes assez proches du volume total. Il semble donc qu'il soit difficile de conclure sur l'existence d'un VER dans cette image. Il est alors nécessaire d'utiliser l'image complète pour les mesures, en espérant que celle-ci soit suffisamment représentative du matériau dans son ensemble. Ceci dit, pour des raisons techniques (mémoire, temps de calcul), il nous est impossible de travailler directement sur l'intégralité de l'image. Celle-ci est alors découpée en 12 sous-volumes de taille $600 \times 600 \times 300$ voxels comme illustrés sur la Figure II-11. Les mesures de ce chapitre seront toutes réalisées sur chaque sous-volume indépendamment et l'erreur relative commise sera calculée grâce à l'équation (II.6).

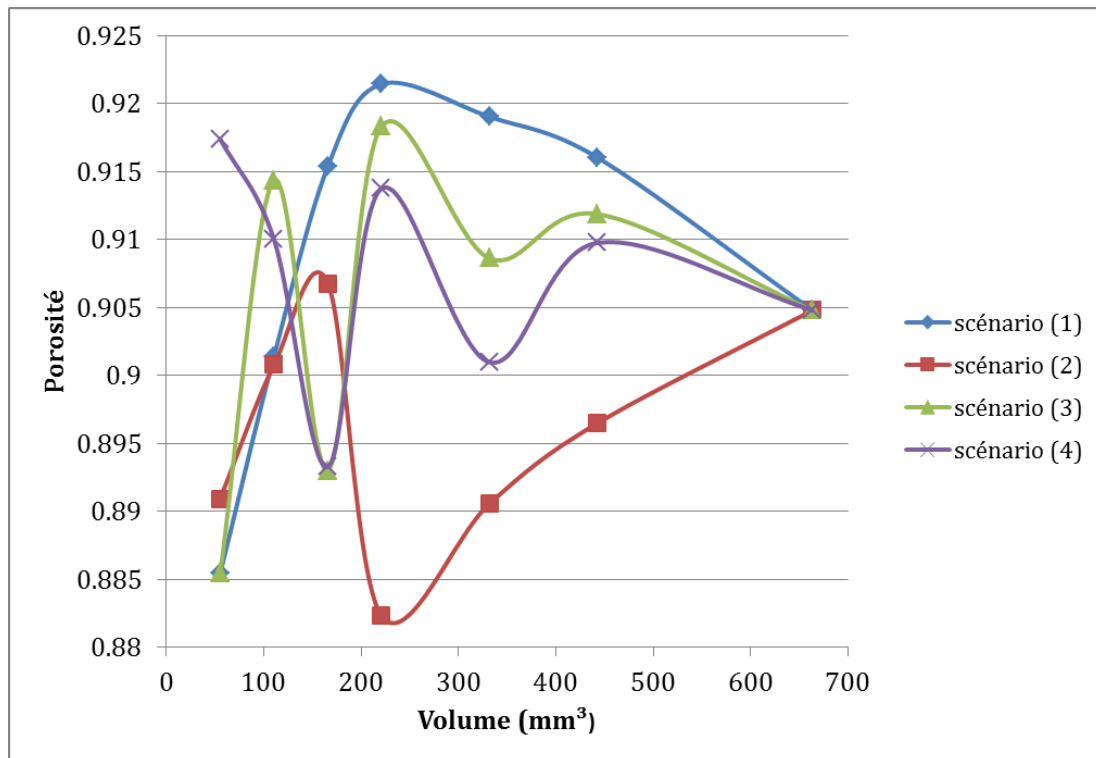


Figure II-10 : Évolution de la porosité avec la taille du volume de mesure suivant plusieurs scénarios.

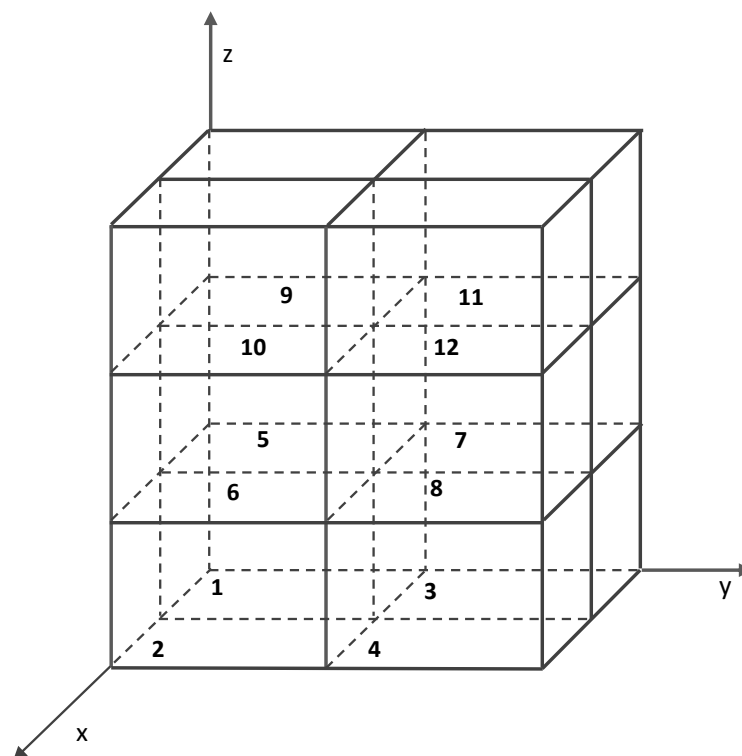


Figure II-11 : La découpe en 12 volumes de l'image principale.

II.4 RÉSULTATS

II.4.1 Porosité

Dans les matériaux à base de fibres végétales, on distingue la porosité interne des fibres de la porosité externe ou interfibres. Dans notre cas, il n'est pas possible de mesurer la porosité des fibres libériennes en raison de la résolution d'image choisie (cf. MEB). Les lumens des chènevottes sont par contre clairement visibles (Figure II-12-a). La porosité des chènevottes peut être évaluée en utilisant une méthode simple (Lux et al., 2006) qui consiste tout d'abord à réaliser une dilatation morphologique de petite taille afin de déconnecter les lumens de la porosité interfibres, ce qui rend ensuite très facile l'identification des amas de voxels poreux de petite taille. Enfin, une érosion de la même taille que la dilatation est réalisée afin de finaliser cette opération qui s'apparente à une fermeture. La différence entre l'image initiale et l'image filtrée permet de mesurer le nombre de voxels des lumens. Cette porosité interne représente moins de 0,5 % de la porosité totale de l'image et son rôle est donc a priori peu important dans les transferts de masse et de chaleur. On travaillera à partir de maintenant sur les images dans lesquels les lumens ont été bouchés.

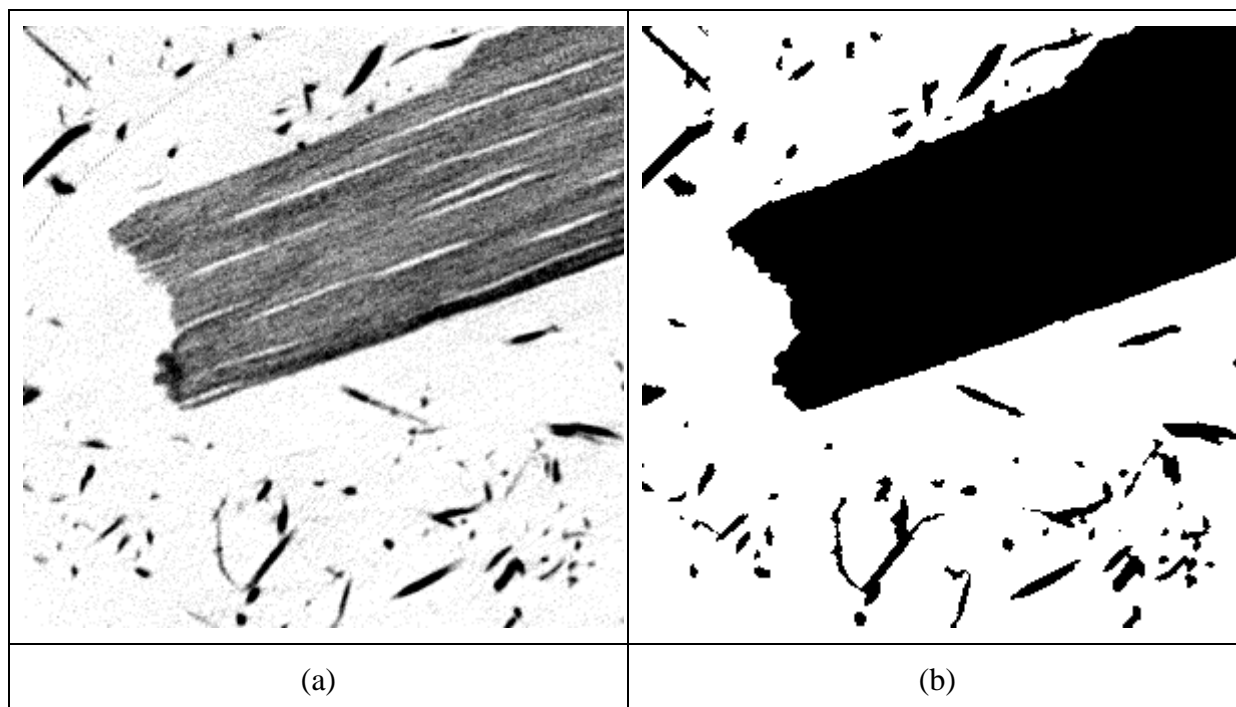


Figure II-12 : Une coupe transversale d'une chènevotte (a) initiale avec lumens (b) après rebouchage des lumens.

La porosité inter-fibre est mesurée dans chaque sous-volume et les résultats sont présentés dans le Tableau II-1. La valeur moyenne est de $90,500 \pm 0,035$ %, ce qui correspond à l'ordre de grandeur de la porosité attendue.

Volume	Porosité (%)	Fibres (%)
1	88,543	11,457
2	91,740	8,260
3	94,327	5,673
4	93,962	6,038
5	92,581	7,419
6	90,259	9,741
7	91,876	8,124
8	89,541	10,459
9	86,779	13,221
10	85,987	14,013
11	91,062	8,938
12	89,094	10,906
Moyenne (%)	90,479	9,521
Ecart type (%)	2,6233	2,623
Variance (%)	0,069	0,069
Erreur absolue (%)	0,036	0,0038

Tableau II-1 : Tableau représentant la porosité et le pourcentage de fibres végétales dans les 12 volumes.

II.4.2 Diamètre des fibres et distribution des pores

Une façon simple d'estimer la distribution de la taille des objets dans une image consiste à effectuer une granulométrie par ouverture morphologique de l'ensemble étudié (Matheron, 1967; Serra, 1982). La granulométrie par ouverture consiste à effectuer une série d'ouvertures morphologiques par des éléments structurants de taille croissante. Chaque ouverture élimine les parties de l'ensemble étudié qui sont strictement plus petites que l'élément structurant courant. La courbe granulométrique est alors simplement déduite des mesures du nombre de voxels à la fin de chaque ouverture. Les granulométries sont réalisées avec des éléments structurants qui sont des boules euclidiennes. Dans ce cas, la granulométrie permet de mesurer les proportions des plus petites dimensions des objets étudiés (c.-à-d. le petit axe de la section des fibres dans le cas où l'on travaille sur l'ensemble des fibres ou la distance interfibres lorsque l'on travaille sur l'espace poral).

Les courbes de distribution de taille des pores et des fibres sont présentées dans les Figure II-13 et Figure II-14 respectivement. Ces résultats montrent un bon accord avec l'analyse qualitative des images MEB. La distribution de taille des pores (Figure II-13) suit approximativement une loi normale, ce qui est un trait distinctif de ce type de matériaux non tissés (Lux et al., 2006). La distance interfibres moyenne est de 420 μm et la valeur de l'écart-type est de 202 μm .

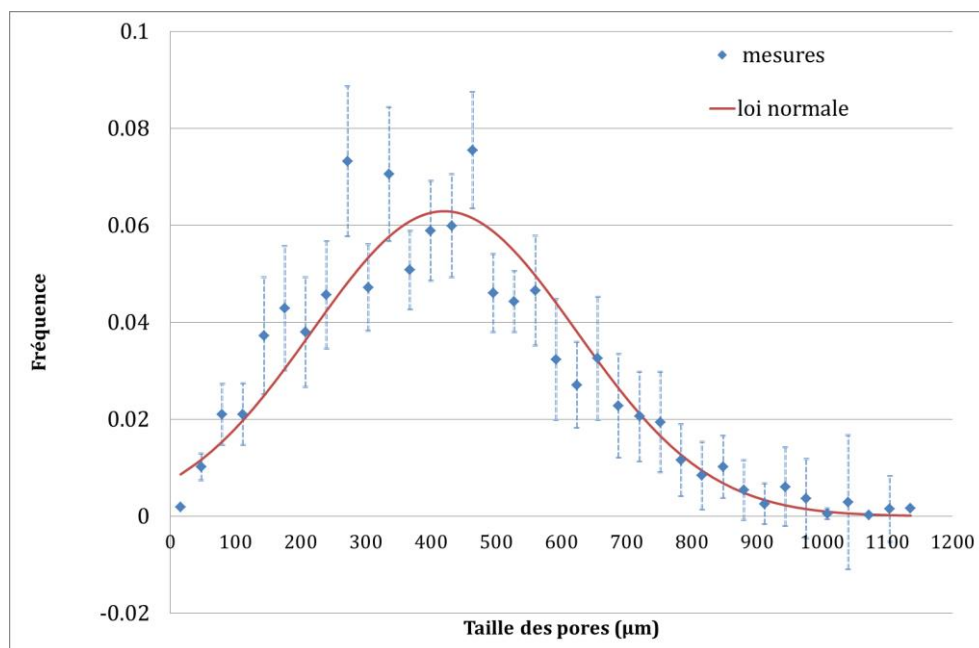


Figure II-13 : Distribution des pores.

Dans la Figure II-14, nous remarquons que la proportion de petites fibres (entre 0 et 32 μm) est d'environ 12 %, ce qui est proche de la proportion estimée de fibres polymères, et que le diamètre moyen des fibres de chanvre libériennes est d'environ 100 μm . Les fibres de plus grandes tailles (chènevottes ou amas de plus de 200 μm) ne représentent que 10 % du volume des fibres total.

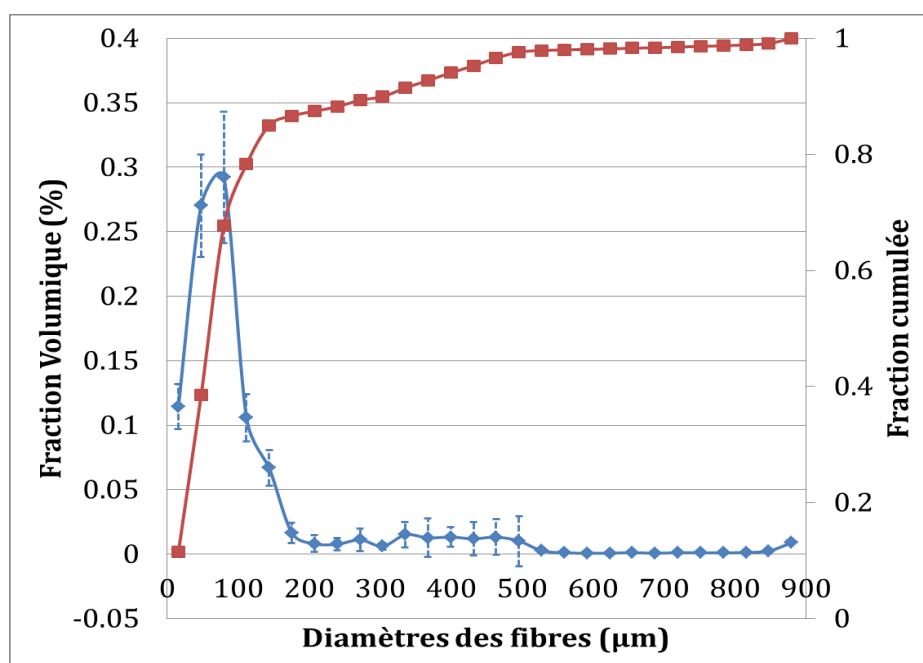


Figure II-14 : Distribution des diamètres des fibres.

II.4.3 Identification des fibres polymères et des fibres de chanvre

Les fibres de polymères et de chanvre ont des propriétés thermo physiques différentes, il est donc nécessaire de pouvoir les identifier dans l'image 3D avant d'effectuer des calculs numériques. Comme il a été dit précédemment, il n'est pas possible de distinguer les fibres polymères et les fibres de chanvre à partir de leur niveau de gris moyen. L'identification des fibres de polymère peut néanmoins se faire sur des critères morphologiques, puisque ces fibres sont de taille plus petite que les fibres de chanvre. Dans ce travail, un algorithme de segmentation développé au laboratoire et détaillé dans (Lux, 2013) est utilisé afin de procéder à cette identification. Sans entrer dans les détails techniques, le programme utilisé se base sur l'exploitation du squelette (ou axe médian) de l'image. Le squelette est une représentation filaire de l'ensemble considéré qui vérifie les propriétés suivantes :

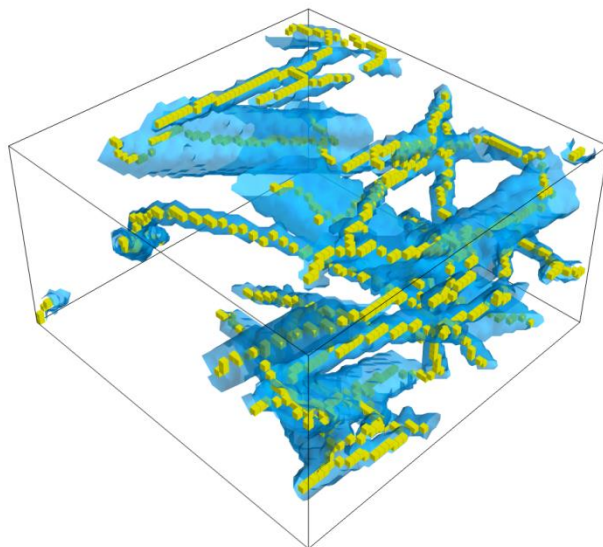
- Il est homotope à l'ensemble initial, ce qui dans le cas d'une image discrète se traduit par la conservation du nombre de composantes connexes, de trous et de tunnels présents dans l'image.
- Il est centré dans l'objet, selon une distance choisie, souvent euclidienne.
- Il est fin, au sens d'une ligne d'un voxel d'épaisseur.

Les propriétés de finesse et de centrage sont bien entendu incompatibles dans le cas d'une image discrète et il convient de choisir quelle est la propriété la plus importante pour l'application visée.

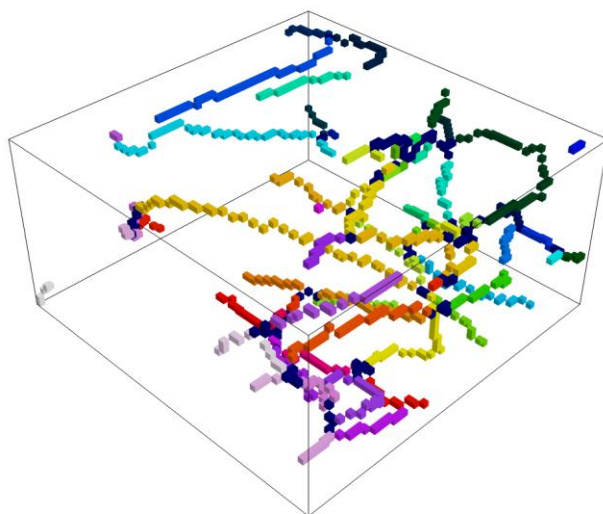
En plus de ces propriétés relativement simples à vérifier, il convient d'ajouter la notion de préservation de la forme de l'objet, car sinon, toute composante connexe de l'image sans trou ni tunnel serait représentée par un simple point (appelé noyau homotopique). Il existe de nombreuses méthodes d'obtention du squelette que nous ne détaillerons pas ici. L'algorithme utilisé dans ce travail est décrit en détail dans Lux, 2005.

Le squelette des fibres constitue un objet simplifié qui peut être utilisé afin de segmenter les fibres, c.-à-d. identifier et labelliser chaque fibre. Le croisement entre plusieurs branches du squelette correspond en effet à une intersection entre plusieurs fibres. Les branches peuvent ainsi être reconnectées sur des critères d'orientation et de similarité de rayon. Lorsque le squelette est segmenté, il reste à dilater celui-ci dans l'image initiale afin de reconstituer les fibres. Afin d'éviter que les petites fibres ne se dilatent dans les plus grandes lors de la reconstruction, les branches du squelette sont dilatées par un algorithme de croissance de région ordonnée par la fonction distance (Lux, 2013).

La Figure II-15-a à d illustre les différentes étapes du processus de segmentation sur un volume de $64 \times 64 \times 32$ voxels extraits de l'image de la laine de chanvre.



(a)



(b)

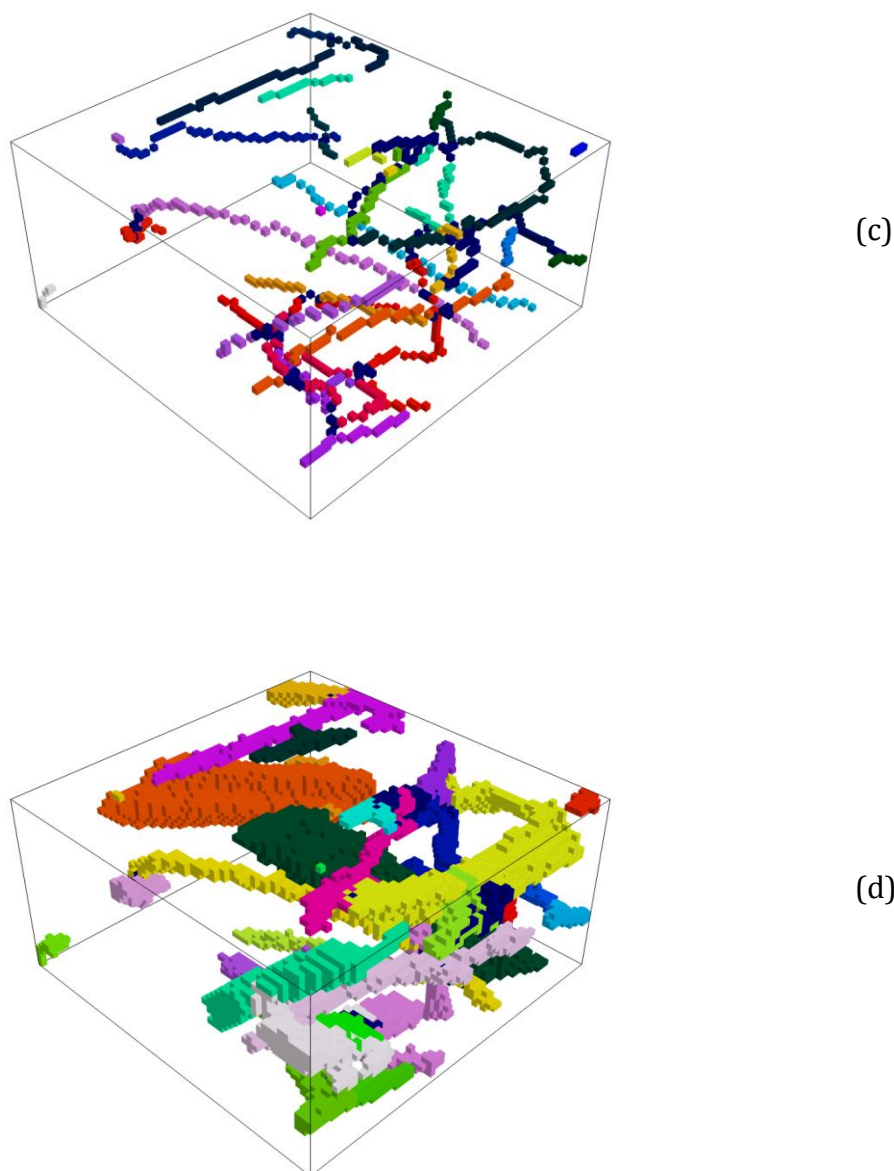


Figure II-15 : (a) superposition du squelette (en jaune) et de la surface des fibres (en bleu transparent). (b) Squelette après labellisation des branches et des nœuds. (c) Squelette après nettoyage et fusion des branches. (d) Image segmentée après reconstruction des fibres par dilatation du squelette. Chaque fibre individuelle est marquée par une couleur différente.

Une fois que les fibres sont identifiées, il est possible de les trier selon certaines caractéristiques géométriques mesurables. Les fibres polymères sont ici identifiées par leur rayon équivalent R_{eq} définie par $R_{eq} = \sqrt{\frac{V}{\pi l}}$ où V est le volume de la fibre (c'est à dire en nombre de voxels) et l est la longueur du squelette de la fibre. En raison de la résolution choisie des images étudiées (16 $\mu\text{m}/\text{voxel}$), mais aussi de la méthode de reconstruction utilisée dans l'algorithme de segmentation, les fibres de polymères

apparaissent généralement plus épaisses que ce qu'elles sont vraiment (c'est à dire 2-3 voxels de diamètre) et par conséquent la valeur de seuil pour R_{eq} est fixée à 1,5 voxels. La Figure II-16 montre les résultats de la segmentation dans un sous-volume de $300 \times 300 \times 150$ voxels. Les fibres polymères sont colorées en jaune tandis que les fibres de chanvre sont en bleu. Avec ce protocole, la fraction volumique moyenne de fibres de polymère se trouve être de 17,8 % du volume des fibres (écart-type de 5,1 % sur les 12 volumes), ce qui est proche de la valeur donnée par le fabricant. L'ensemble des résultats sur les volumes de mesures est présenté dans le Tableau II-2.

Volume	PES (%)
1	14,75
2	22,09
3	26,19
4	24,11
5	17,69
6	13,60
7	21,56
8	15,87
9	8,83
10	11,93
11	18,89
12	17,80
Moyenne (%)	17,774
Ecart type (%)	5,131
Variance (%)	0,263
Erreur absolue (%)	0,027

Tableau II-2 : Pourcentage des fibres PES par rapport aux volumes total des fibres, dans les 12 sous volumes.

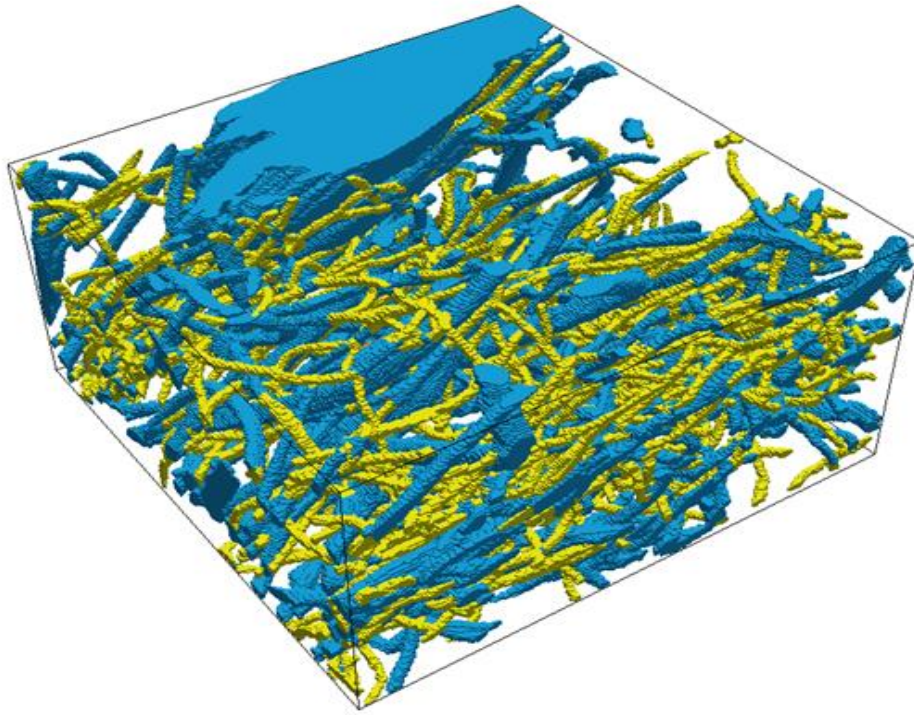


Figure II-16 : Segmentation des fibres (en bleu fibres de chanvre et jaune fibres polymères).

II.4.4 Auto corrélation

L'anisotropie globale du matelas fibreux peut être mise en évidence par des calculs d'autocorrélation (Lux et al., 2011) réalisés dans différentes directions. La fonction d'autocorrélation mesure la probabilité pour que deux voxels situés à une distance et selon une direction données appartiennent à la même phase. Une orientation privilégiée des fibres dans une direction se traduira par des fonctions d'autocorrélation de valeurs plus élevées que pour d'autres directions. D'autre part, lorsque la fonction d'autocorrélation tend vers 0, elle indique la distance à partir de laquelle il n'y a plus de corrélation entre deux voxels, ce qui permet donc d'évaluer qualitativement les longueurs de corrélation dans les différentes directions étudiées. La Figure II-17-a présente les résultats dans 13 directions tandis que la Figure II-17-b ne présente que les trois directions principales pour une visualisation plus facile. Si l'on peut constater que les fibres présentent bien une orientation privilégiée dans les plans transverses (plans xOy), il est néanmoins intéressant de constater qu'elles ne sont pas distribuées de manière isotrope dans ces plans, puisque la fonction d'autocorrélation selon l'axe x est systématiquement supérieure à celle selon l'axe y . Il n'est pour l'instant pas possible de dire si cet effet est lié au procédé de fabrication ou à une modification de la structure lors de la découpe. On évalue par ailleurs les longueurs de corrélation entre environ $800\text{ }\mu\text{m}$ selon l'axe z et 2 mm pour les axes x et y .

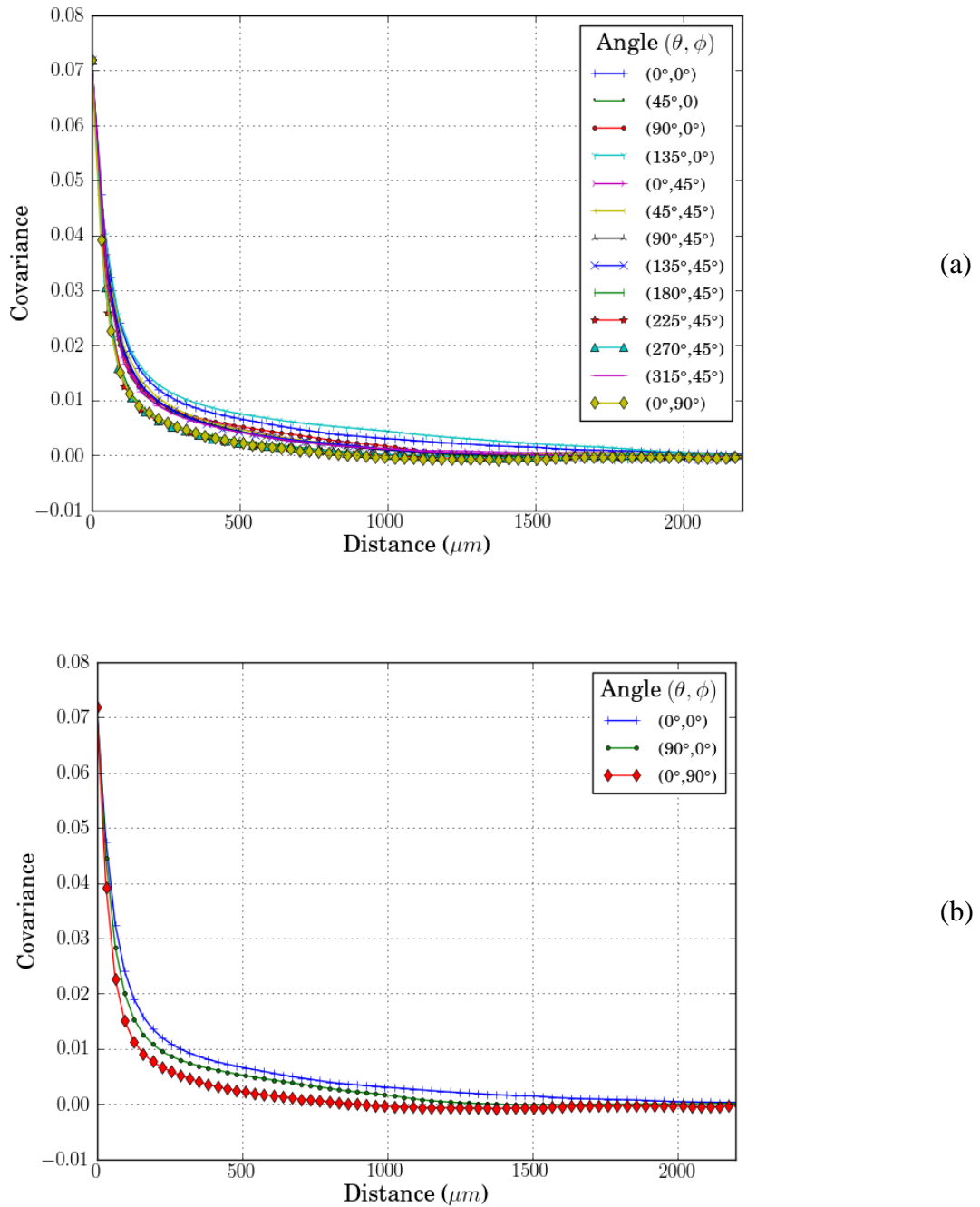


Figure II-17 : Auto-corrélation : (a) dans 13 directions, (b) dans les 3 directions principales.

II.4.5 Orientation locale des fibres

Une des particularités de fibres naturelles est qu'elles présentent des propriétés thermiques anisotropes. La conductivité thermique est environ deux fois plus grande dans la direction longitudinale des fibres que dans la direction radiale ou tangentielle (J. F. Siau, 1984). Il est donc important de pouvoir détecter localement l'orientation principale de la fibre afin de déterminer le tenseur de conductivité thermique locale. De

plus, les calculs d'orientations locales permettent de caractériser l'anisotropie du matériau, fournissant une information complémentaire aux mesures d'autocorrélation.

Pour cela, nous utilisons un algorithme similaire à celui décrit dans Altendorf et Jeulin, 2011, mais avec 49 directions uniformément discrétisées au lieu de 13, afin d'atteindre une précision satisfaisante, tout en conservant un temps de calcul raisonnable. Le principe de cette méthode est de calculer en chaque point les distances orientées dans l'ensemble des directions choisies. La distance orientée $d(\vec{v}_i)$ est tout simplement la distance minimale du point au bord le plus proche suivant le vecteur \vec{v}_i . En chaque voxel, on calcule ensuite la distance centralisée, notée d_c , comme la moyenne des distances pour deux directions opposées $d_c(v_i) = \frac{1}{2}(d(\vec{v}_i) + d(-\vec{v}_i))$. Cette valeur est plus généralement appelée *half-chord length*. On calcule ensuite les positions P_i des extrémités des vecteurs des distances centralisées :

$$P_i = d_c(v_i)\vec{v}_i$$

Finalement, les vecteurs propres et valeurs propres du tenseur d'inertie sont calculés sur ce nuage de points, ce qui permet de déterminer les directions principales en chaque voxel. La discrétisation des segments lors de la phase de calcul des distances orientées est réalisée avec un algorithme simple de type Bresenham (Bresenham, 1985).

La Figure II-18 propose une visualisation des directions locales dans un petit volume. Les segments représentant la direction principale de la fibre sont colorés en fonction de leur coordonnée selon z, pour une meilleure visualisation.

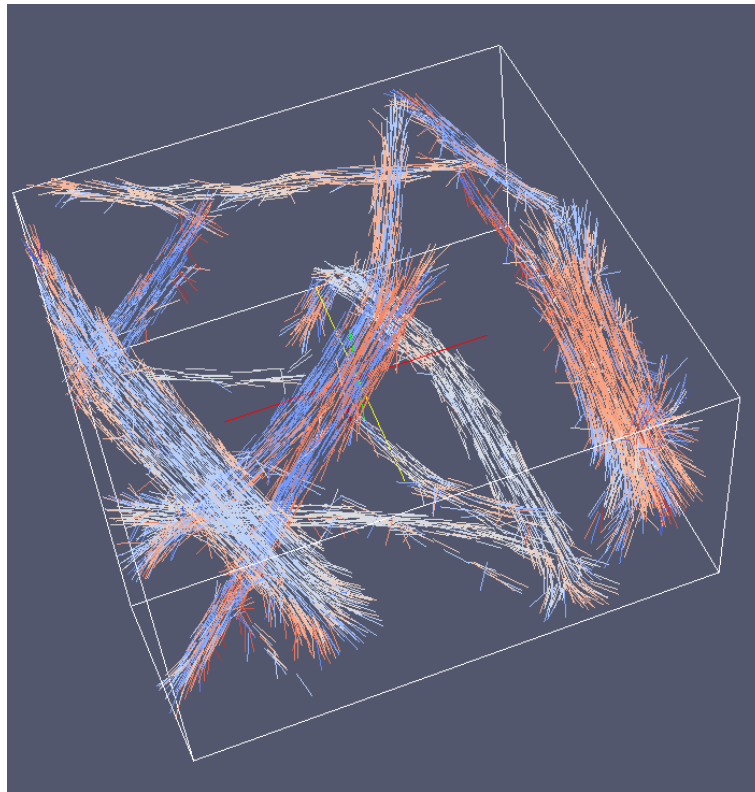


Figure II-18 : Vecteurs d'orientations locales.

Si la carte des directions locales est nécessaire afin d'identifier les propriétés thermiques locales de fibres de chanvre, elle est également utile pour caractériser l'anisotropie des matériaux. La Figure II-19 indique le pourcentage des fibres qui ont une orientation (θ, φ) . θ est l'angle azimutal (variant de 0 à 360 °) et φ est l'angle polaire (variant de 0 à 90°) la direction Oz (c.-à-d. selon l'épaisseur du panneau) est définie de telle sorte que $\varphi = 90^\circ$. Ces résultats confirment que les fibres sont principalement orientées dans des plans transversaux. Il est également intéressant de noter qu'il y a une orientation très favorable le long de l'axe x, confirmant les résultats de l'analyse de l'auto-corrélation.

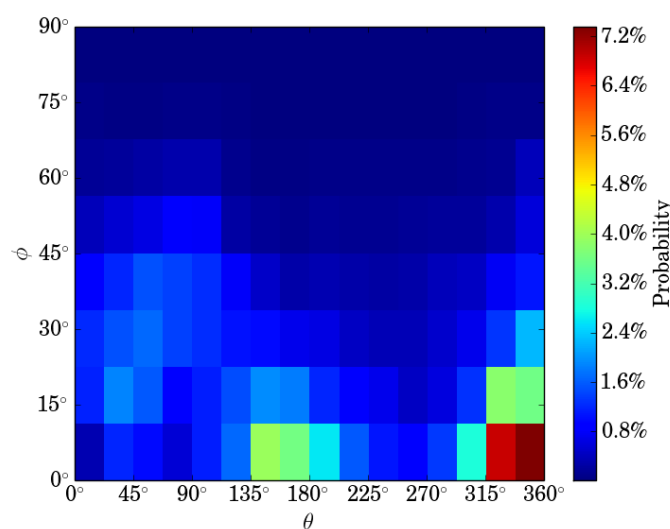


Figure II-19 : Distribution des directions locales.

II.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, l'imagerie par MEB a permis une première caractérisation qualitative de la laine de l'échelle du réseau de fibres à celle de la fibre individuelle. La structure interne de la fibre de chanvre ainsi que les dimensions caractéristiques des lumens ont ainsi pu être mises en évidence. Nous avons constaté que les fibres de chanvre d'origine libériennes sont constituées de plusieurs cellules élémentaires présentant des lumens très étroits : plusieurs micromètres de long et une plus petite dimension de l'ordre du micromètre.

La tomographie aux rayons X a ensuite permis de caractériser de manière quantitative l'architecture du réseau fibreux ainsi que l'espace poral. Nous avons entre autres montré que la distribution de taille de pore se rapproche d'une loi normale, ce qui est caractéristique des matériaux non tissés de faible densité (Lux, 2006). D'autre part, l'anisotropie du matelas fibreux lié au process a bien été mise en évidence par des mesures d'auto-corrélation ainsi que d'orientation locale des fibres. Enfin, les fibres polymères ont pu être identifiées sur des critères de diamètre à l'aide d'un algorithme de segmentation mis au point au laboratoire. La proportion de polymère obtenue correspond bien aux indications du fabricant.

Les résultats de l'analyse d'image tomographique nous ont par ailleurs permis de montrer qu'il n'était pas possible de définir un VER avec certitude à partir de l'image

disponible. Les dimensions de l'image sont en effet trop petites par rapport à la taille des plus gros granulats qui constituent une hétérogénéité de grande taille. Les calculs d'autocorrélations montrent cependant que l'image contient environ 4 à 5 longueurs de corrélations dans les directions x et y (plans transverses) et environ 9 longueurs de corrélations dans l'épaisseur du matériau. Le volume d'étude semble donc malgré tout suffisamment important pour satisfaire aux contraintes géométriques imposées par le procédé de changement d'échelle. De plus les écarts-types calculés pour chacune des mesures effectuées restent relativement faible et on peut imaginer qu'il en est de même pour les propriétés effectives qui seront déterminées à partir de cette image. Il serait néanmoins souhaitable de confirmer ces hypothèses par des mesures sur d'autres images de la laine, localisés à plusieurs endroits au sein de l'isolant.

Finalement, l'ensemble des informations recueillies à la l'échelle de la fibre ainsi qu'à l'échelle du réseau fibreux permettent d'envisager la modélisation des transferts d'humidité dans une approche multi échelles. L'image tomographique segmentée constitue également un support pour les simulations numériques et le calcul des propriétés effectives directement sur la structure réelle, permettant ainsi une comparaison avec les résultats expérimentaux d'une part et les résultats de modèles existants d'autre part.

Chapitre III.

MODELISATION MULTI-ECHELLE DES TRANSFERTS

COUPLES DE MASSE ET DE CHALEUR

III.1 INTRODUCTION

Les fibres végétales utilisées dans la fabrication des isolants biosourcés présentent des propriétés thermiques très intéressantes pour une application bâtiment. Leur chaleur massique est en effet plus importante que de nombreux matériaux de construction (on trouve une chaleur massique entre 1200 et 1700 J.kg⁻¹.K⁻¹ pour le chanvre qui est plus élevée que celle de laine de verre ou de la laine de roche qui varie entre 800 et 1000 J.kg⁻¹.K⁻¹) et leur conductivité thermique est faible du fait de la structure poreuse des fibres elles-mêmes. Ces fibres ont cependant pour particularité de présenter une hygroscopicité relativement importante ; elles peuvent en effet absorber une masse d'eau qui peut aller jusqu'à environ 30 % de leur masse sèche sous forme d'eau liée. Si ce comportement peut être un atout pour réguler l'humidité à l'intérieur des bâtiments et ainsi améliorer le confort intérieur, il peut aussi se révéler néfaste à bien des égards : une masse d'eau absorbée trop importante peut en effet favoriser le tassement du matériau, l'apparition de moisissures ou encore la perte de performances d'isolation. De plus les phénomènes de sorption / condensation et de désorption / évaporation s'accompagnent de transfert de chaleur latente. Cette chaleur latente peut jouer un rôle très important dans les performances de l'enveloppe des bâtiments, surtout lorsque ceux-ci sont très bien isolés puisque les flux de chaleur sensible sont relativement faibles.

L'objectif de ce travail est de développer un modèle permettant de mieux comprendre le comportement hygroscopique des fibres et notamment l'impact de la teneur en eau sur les propriétés thermiques à l'échelle de la fibre d'une part et plus généralement sur les performances macroscopiques de l'isolant d'autre part. Pour ce faire, notre approche se base sur la mise en place d'un modèle multiéchelles des transferts couplés de masse et de chaleur avec changement de phase. L'originalité de notre démarche est de considérer trois échelles caractéristiques : l'échelle de la fibre comme matériau hétérogène ou échelle microscopique, l'échelle du réseau de fibres homogénéisées et enfin l'échelle macroscopique ou échelle du matériau. Ce double changement d'échelle a pour but de bien dissocier le comportement des éléments constitutifs (les fibres) du comportement de l'ensemble. Le premier changement d'échelle permet d'établir les équations de transferts à l'intérieur des fibres végétales, ainsi que les relations constitutives entre les propriétés homogénéisées (conductivité thermique, perméabilité, diffusivité à la vapeur, etc.) et la teneur en eau de la fibre. Le comportement hygrothermique macroscopique de l'isolant est quant à lui obtenu par un second changement d'échelle depuis l'échelle du réseau de fibres homogénéisées jusqu'à l'échelle du matériau.

III.2 OUTILS MATHEMATIQUES DE CHANGEMENT D'ECHELLE

Un des problèmes fondamentaux dans l'étude des milieux hétérogènes et des milieux poreux en particulier, est l'obtention de modèles permettant de décrire leur comportement sous forme de milieux homogènes équivalents d'une part et de définir les propriétés équivalentes d'autre part. À petite échelle, les propriétés physiques intrinsèques ainsi que les équations qui décrivent les transferts de chaleur ou de masse peuvent être différentes dans chaque phase. Les variables d'état sont également définies pour chaque phase présente. Cette description microscopique des transferts permet de comprendre la physique des phénomènes étudiés ou d'étudier l'influence de certains

paramètres comme la microstructure sur le comportement ou les propriétés du matériau. D'un point de vue pratique, cependant, il est utile de pouvoir remplacer le milieu hétérogène par un milieu homogène ayant le même comportement, avec des propriétés équivalentes, et de travailler avec des variables d'état définies en tout point du milieu. La Figure III-1 illustre le changement d'échelle dans le cas d'un milieu triphasique. On distingue ici :

- L'échelle microscopique où l'on distingue trois phases - solide, liquide et gaz - de longueurs caractéristiques l_s , l_l et l_g .
- L'échelle plus grande ou *échelle macroscopique* de longueur caractéristique L où chaque phase devient un continuum c.-à-d. un milieu continu occupant le système dans son entier. Le détail de la géométrie des pores et le comportement exact des interfaces des fluides ne seront plus connus.

Dans certains cas, le matériau étudié peut comporter plusieurs échelles caractéristiques bien identifiées. Il peut alors être pertinent de réaliser plusieurs changements d'échelles successifs. Une des difficultés possibles de cette approche est d'écrire les conditions à l'interface entre le milieu hétérogène homogénéisé et un milieu homogène, voir par exemple (Chandesris and Jamet, 2009).

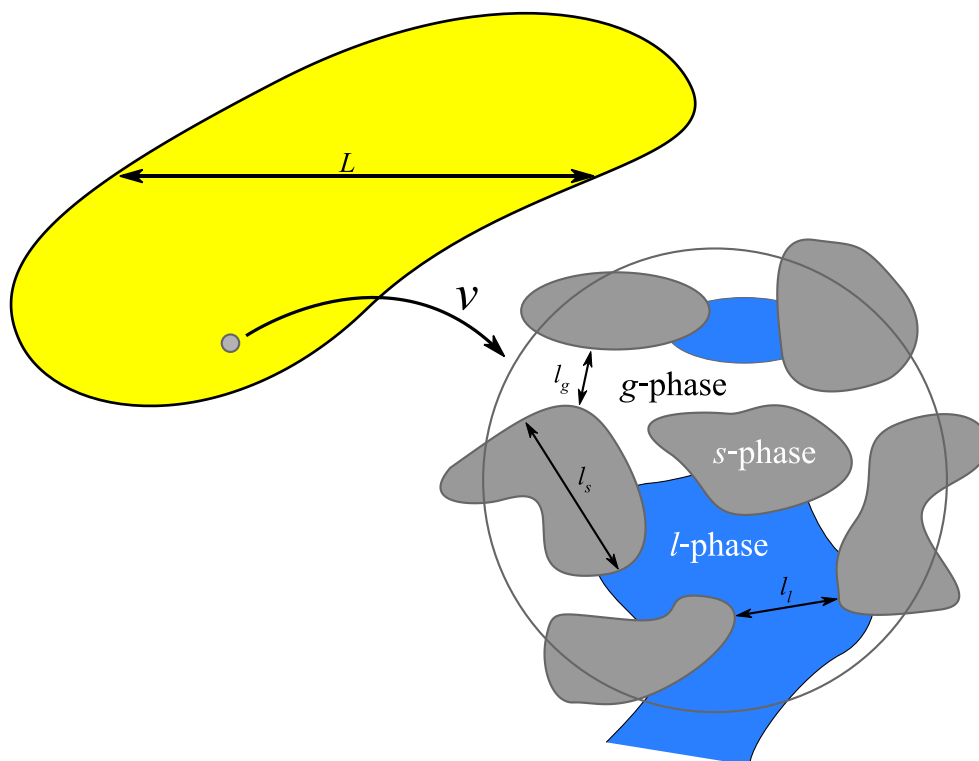


Figure III-1 : Illustration d'un milieu poreux constitué de trois phases solide (s), liquide (l) et gaz (g) et du milieu homogène équivalent constitué d'une seule phase.

III.2.1 Notion de séparation des échelles et de Volume Élémentaire Représentatif

La plupart des méthodes de changement d'échelle sont basées sur l'idée que les longueurs caractéristiques de l'échelle microscopique sont très petites devant l'échelle macroscopique. C'est la condition de séparation des échelles qui s'écrit :

$$l_i \ll L \quad \text{avec } i = s, l \text{ ou } g \quad (\text{III.1})$$

Ceci étant, cette contrainte de séparation n'est pas suffisante en pratique dans le cas de matériaux à structure non périodique. Il convient en effet d'ajouter une contrainte liée à la *représentativité* du domaine élémentaire étudié.

La méthode de prise de moyenne volumique s'appuie ainsi sur la notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER) dont le choix dépend de la géométrie du milieu ainsi que des phénomènes qu'on veut étudier. Le VER est l'élément le plus petit contenant toute l'information microgéométrique du matériau étudié. Ceci implique une invariance par translation des propriétés géométriques mesurées dans le VER, par exemple porosité, distribution de la taille des grains, etc. Cette contrainte purement géométrique, bien que fondamentale dans la méthode de prise de moyenne (Quintard and Whitaker, 1994a, 1994b) n'est pas forcément suffisante et peut également dépendre des phénomènes physiques étudiés (Ahmadi and Quintard, 1996).

Dans la suite, le VER est noté $V(\mathbf{x})$. Il est schématisé dans la Figure III-2 par une boule de rayon r_0 de centre de coordonnées \mathbf{x} , qui représente le système de coordonnées de la grande échelle. La position d'un point situé à l'intérieur de ce volume peut-être déterminée de deux manières différentes : soit dans ce repère dit global par le vecteur \mathbf{r} , soit par un vecteur \mathbf{y} exprimé dans un système de coordonnées locales dont l'origine est le centre du VER. Les normales unitaires à l'interface entre une phase i et j et dirigées de i vers j sont notées \mathbf{n}_{ij} .

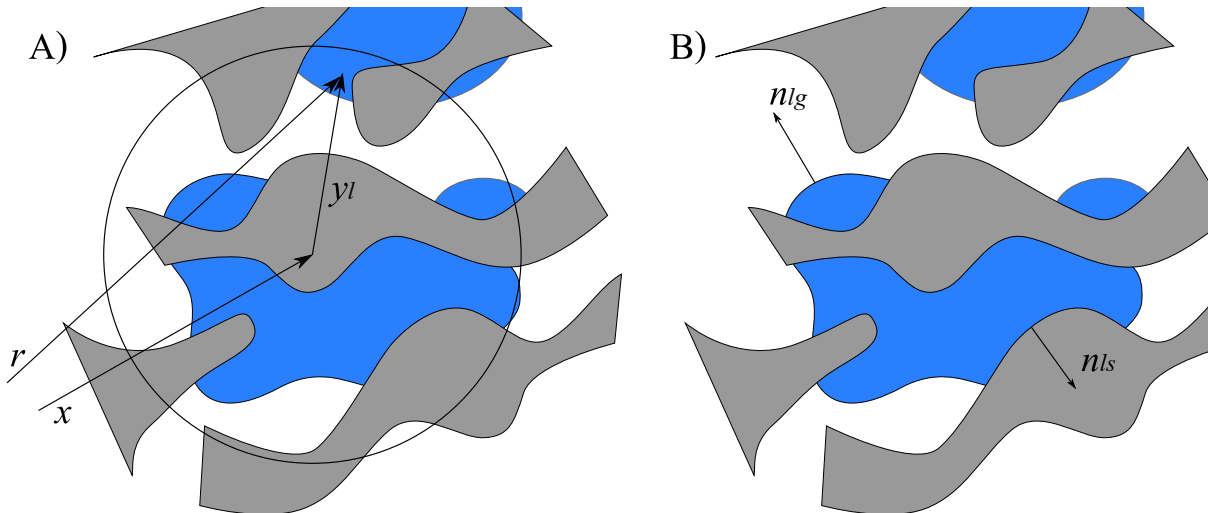


Figure III-2 : Notations utilisées a) Le vecteur \mathbf{x} indique la position du centre de gravité du VER, le vecteur position \mathbf{r} localise un point dans l'espace et \mathbf{y} est le vecteur de position dans le repère local. (b) \mathbf{n}_{ij} représente la normale unitaire dirigée de la phase i vers la phase j .

III.2.2 Définition des moyennes

Dans la méthode de la prise de moyenne volumique, les variables macroscopiques sont définies comme des champs microscopiques moyennés sur un volume de contrôle (le VER). La moyenne, dite *superficielle*, d'une variable locale ψ_i associée à la phase i est définie par :

$$\langle \psi_i \rangle|_x = \frac{1}{V} \int_{\mathbf{y} \in V_i(x)} \psi_i(\mathbf{y}) dV \quad (\text{III.2})$$

Si on considère la fonction indicatrice de phase, notée $\gamma_i(\mathbf{r})$ et définie par :

$$\gamma_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Son intégration dans le VER permet de définir la fraction volumique de la phase i , notée ϵ_i :

$$\epsilon_i = \frac{V_i}{V} = \frac{1}{V} \int_{\mathbf{y} \in V_i(x)} \gamma_i(\mathbf{y}) dV \quad (\text{III.4})$$

Finalement, on définit la moyenne *intrinsèque* de phase par :

$$\langle \psi_i \rangle^i|_x = \frac{1}{V_i} \int_{\mathbf{y} \in V_i(x)} \psi_i(\mathbf{y}) dV = \frac{1}{\epsilon_i} \langle \psi_i \rangle|_x \quad (\text{III.5})$$

Les moyennes superficielles et intrinsèques sont reliées par la relation :

$$\langle \psi_i \rangle|_x = \epsilon_i \langle \psi_i \rangle^i|_x \quad (\text{III.6})$$

Afin de simplifier l'écriture, on omettra par la suite de préciser le centre du volume de prise de moyenne et l'on écrira simplement $\langle \psi_i \rangle$ à la place de $\langle \psi_i \rangle|_x$. De la même manière, on notera V au lieu de $V(x)$.

III.2.3 Théorèmes de prise de moyenne

La méthode de prise de moyenne (Whitaker, 1999) se base sur l'application de l'opérateur de moyenne $\langle . \rangle$ sur les équations différentielles gouvernant le problème physique à petite échelle. Nous présentons ici les principaux théorèmes utilisés par la suite afin d'interchanger opérateurs différentiels et intégration.

❖ Théorème de Reynolds

Dans le cas d'un milieu contenant deux phases i et j dont l'interface S_{ij} se déplace avec une vitesse notée \mathbf{w}_{ij} , on peut écrire :

$$\left\langle \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_i \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_{ij}} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{w}_{ij} \psi_i dS \quad (\text{III.7})$$

Bien entendu, cette relation se simplifie lorsque les interfaces sont immobiles.

❖ *Théorème de prise de moyenne spatiale*

L'application de l'opérateur de moyenne $\langle . \rangle$ sur les opérateurs différentiels s'effectue à l'aide du théorème de prise de moyenne (Howes and Whitaker, 1985). Pour une grandeur ψ_i scalaire définie dans une phase i , on a :

$$\langle \nabla \psi_i \rangle = \nabla \langle \psi_i \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_i} \mathbf{n}_i \psi_i dS \quad (\text{III.8})$$

où S_i désigne la surface de la phase i et \mathbf{n}_i la normale sortante.

Si Ψ_i est un tenseur d'ordre 1 ou 2, l'application de l'opérateur de moyenne $\langle . \rangle$, on a les relations suivantes :

$$\langle \nabla \cdot \Psi_i \rangle = \nabla \cdot \langle \Psi_i \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_i} \mathbf{n}_i \cdot \Psi_i dS \quad (\text{III.9})$$

$$\langle \nabla \Psi_i \rangle = \nabla \langle \Psi_i \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_i} \mathbf{n}_i \Psi_i dS \quad (\text{III.10})$$

III.2.4 Décomposition en déviation

La condition de séparation des échelles peut se traduire par la décomposition des grandeurs physiques sous la forme d'un terme macroscopique, variant lentement selon la longueur caractéristique L et d'un terme local dont la longueur caractéristique de variation est celle de l'échelle microscopique l . Cette décomposition, souvent appelée décomposition de Gray (1975), se note :

$$\psi_i = \langle \psi_i \rangle^i + \tilde{\psi}_i \quad (\text{III.11})$$

Les déviations sont également souvent supposées varier beaucoup plus rapidement en temps que les grandeurs moyennes, ce qui permet de considérer les problèmes gouvernant les déviations comme étant quasi-stationnaires. Notons que cette hypothèse, bien que simplifiant considérablement les problèmes, n'est pas indispensable comme le montrent les travaux de certains auteurs (Wood and Valdés-Parada, 2013).

III.2.5 Formulation locale

Les termes moyens sont définis pour une coordonnée spatiale donnée et ils varient donc continuellement à l'intérieur du VER. La moyenne d'une grandeur moyenne s'exprime donc comme :

$$\langle \langle \psi_i \rangle \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathbf{y} \in V} \langle \psi_i \rangle |_{\mathbf{y}} dV \quad (\text{III.12})$$

Dans la plupart des cas, cette formulation non locale peut se simplifier en se reposant sur la condition de séparation des échelles. Les longueurs caractéristiques de variations des grandeurs moyennes étant grandes devant la taille du VER, on suppose généralement que celles-ci sont constantes à l'intérieur du VER. Cela permet d'écrire :

$$\langle \langle \psi_i \rangle \rangle \simeq \frac{1}{V} \langle \psi_i \rangle |_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y} \in V} \gamma_i(\mathbf{y}) dV = \frac{V_i}{V} \langle \psi_i \rangle |_{\mathbf{x} = \varepsilon_i} \langle \psi_i \rangle \quad (\text{III.13})$$

L'utilisation de la moyenne intrinsèque permet d'obtenir :

$$\langle \langle \psi_i \rangle \rangle^i = \langle \psi_i \rangle \quad (\text{III.14})$$

De la même manière, on obtient pour les intégrales surfaciques une expression du type :

$$\frac{1}{V} \int_S \langle \psi_i \rangle \mathbf{n}_i dS \simeq 0 \quad (\text{III.15})$$

Cette hypothèse implique également que la moyenne des déviations est nulle. En effet, en introduisant la décomposition de Gray, on peut écrire la moyenne de ψ_i :

$$\langle \psi_i \rangle = \langle \langle \psi_i \rangle + \tilde{\psi}_i \rangle = \langle \psi_i \rangle + \langle \tilde{\psi}_i \rangle \Rightarrow \langle \tilde{\psi}_i \rangle = 0 \quad (\text{III.16})$$

Les conditions géométriques pour qu'une formulation locale puisse être utilisée ont été étudiées par Quintard and Whitaker (1994a, 1994b) et plus récemment par Wood (2013).

L'application de l'opérateur de moyenne sur deux champs locaux ψ_i et ϕ_i dans la phase (i) peut alors s'écrire :

$$\langle \phi_i \psi_i \rangle \simeq \epsilon_i \langle \phi_i \rangle^i \langle \psi_i \rangle^i + \langle \tilde{\phi}_i \tilde{\psi}_i \rangle \quad (\text{III.17})$$

III.2.6 Synthèse de la méthode de prise de moyenne

Une synthèse de la méthode de prise de moyenne et de ces principales hypothèses est disponible dans un article de Davit et al. (2010). Les différentes étapes du changement d'échelle sont illustrées par la Figure III-3 et décrites ci-dessous :

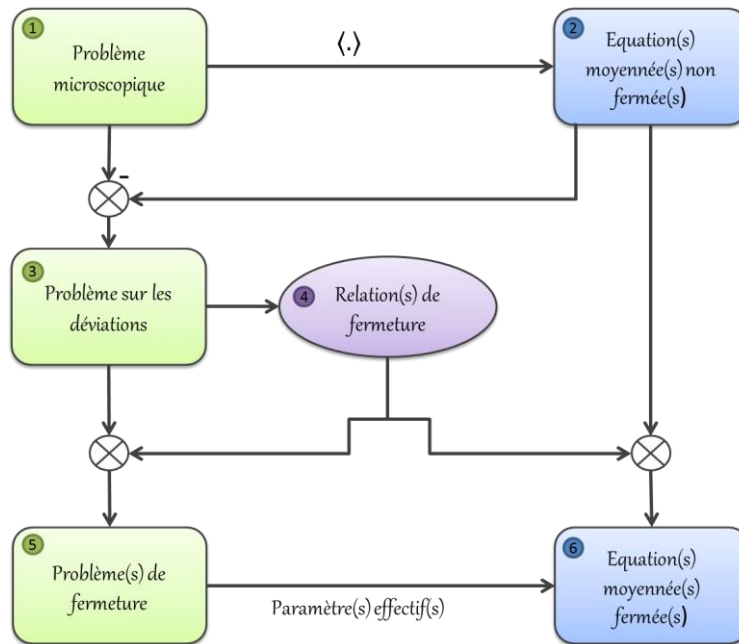


Figure III-3 : Schéma montrant les étapes de la méthode de la prise de moyenne.

1. Définir le **problème microscopique** : les équations de conservation dans chacune des phases identifiées ainsi que les conditions aux limites, les différentes propriétés physiques et les caractéristiques géométriques.
2. Moyenner $\langle . \rangle$ sur le VER les équations différentielles qui gouvernent le système à petite échelle. L'application de l'opérateur de moyenne s'effectue en utilisant les théorèmes spatiaux et temporels vus dans les sections antérieures. On obtient alors les **équations moyennées non fermées**, contenant encore des variables microscopiques. On notera que les interactions entre les phases qui étaient à l'origine les conditions aux limites du problème microscopique apparaissent dans les intégrales surfaciques des équations moyennées.
3. Écrire le **problème** mathématique **qui gouverne les déviations** afin de faire apparaître le lien avec les variables macroscopiques. Ce problème est obtenu en soustrayant des équations locales dans lesquelles on a introduit la décomposition de Gray (équation (III.11)) aux équations moyennées non fermées (étape 1 – étape 2). L'écriture du problème local ainsi que des conditions aux limites associées permet de faire apparaître des termes sources qui nous indiquent la forme de la relation entre les variables macroscopiques et locales.
4. En substituant les déviations par leur expression en fonction des termes macroscopiques dans le problème local on obtient un problème appelé **problème de fermeture**. Les variables de fermetures sont alors totalement définies à l'échelle du pore par la résolution de ce problème.
5. En introduisant les relations de fermeture (étape 3) dans les équations moyennées non fermées (étape 2) on obtient des **équations macroscopiques fermées**. Ces équations macroscopiques ne contiennent que des variables macroscopiques. Les paramètres effectifs qui apparaissent dépendent des variables de fermeture et il est alors possible de les calculer en résolvant les problèmes de fermeture sur des microstructures connues.

III.3 MODELISATION DES TRANSFERTS COUPLES DE CHALEUR ET DE MASSE A L'ECHELLE DE LA FIBRE

La première étape de notre travail consiste à établir les équations qui gouvernent le transfert de chaleur et de masse à l'échelle de la fibre homogène à partir de la prise de moyenne des équations à l'échelle microscopique, c.-à-d. à l'intérieur de la fibre. Avant de procéder au premier changement d'échelle, le problème local doit tout d'abord être défini.

III.3.1 Définition du problème à l'échelle microscopique

Comme cela a déjà été observé dans la section II.3.1, les fibres naturelles étudiées ici possèdent une porosité de très petite taille qui va de la dizaine de micromètres pour les lumens des chènevottes à environ 0,5 μm pour les plus petites dimensions des lumens des fibres libériennes. Ces faibles dimensions permettent de négliger le transfert convectif par rapport au transfert de chaleur par conduction. D'autre part, les transferts radiatifs au sein des fibres seront également négligés, en se basant sur les dimensions caractéristiques d'une part, mais aussi sur les températures d'utilisation usuelles dans le

cas d'une paroi de bâtiment (de l'ordre de 0°C à 30°C avec selon les conditions, avec de possibles dépassements ponctuels).

En ce qui concerne le transport d'humidité dans les fibres, la situation est beaucoup plus complexe, du fait notamment de la forte hygroscopicité des fibres de chanvre. D'après Engelund et al. (2012), le transport de l'eau dans un matériau hygroscopique à pores ouverts tels que le bois (les fibres de chanvre et le bois présentant de fortes similarités en termes de composition chimique et anatomique) est un transfert de masse couplé d'eau dans différentes phases. En général dans le système poreux, trois phases de l'eau sont possibles : solide (glace), liquide et gaz (vapeur). À l'exception de l'aspiration capillaire lorsque le matériau est en partie immergé dans ou en contact direct avec l'eau liquide, le transport de l'humidité à l'intérieur du système poreux est fortement lié à la diffusion de vapeur. Dans ce travail, on se limitera au cas où la teneur en eau de la fibre est inférieure à la teneur en eau de saturation. En deçà de ce point de saturation, l'eau liquide est présente principalement sous forme d'eau liée, très peu mobile. Dans ce cas de figure, le transport d'humidité est gouverné par trois procédés :

- La diffusion de la vapeur dans le système poreux.
- La sorption.
- La diffusion de l'eau liée dans la paroi cellulaire.

Si le transfert de vapeur dans la porosité peut généralement être décrit à l'aide d'une loi de Fick, il reste encore beaucoup à comprendre pour expliquer et modéliser le phénomène de sorption et de diffusion de l'eau à l'intérieur de la paroi de la fibre. D'après Hill et al. (2012), les isothermes de sorption des fibres végétales cellulosiques ont un comportement de type non Fickien pouvant être décrit par un modèle de type « parallel exponential kinetics » (PEK). Ce modèle rend compte de deux cinétiques concurrentes : une cinétique lente et une cinétique rapide. Il n'y a pas pour l'instant de consensus quant à l'interprétation physique de ces deux cinétiques.

Notons de plus que les caractéristiques de diffusion de l'eau liée dans les parois cellulaires sont difficiles à déterminer expérimentalement, du fait de la diffusion très lente de l'eau liée par rapport à la diffusion de vapeur dans la structure poreuse.

Comme il a été mentionné plus haut, nous nous limitons à une teneur en eau inférieure à la teneur en eau de saturation des fibres (environ 30 % en masse pour la plupart des fibres végétales ligno-cellulosiques). Dans ce cas, nous supposons que l'eau liquide est uniquement de l'eau liée. De ce fait, nous négligerons dans un premier temps le mouvement de l'eau liquide par rapport au transfert d'humidité sous forme de vapeur d'une part et par rapport aux cinétiques de changement de phase (condensation / évaporation et sorption / désorption) d'autre part.

Concernant le transfert de vapeur dans l'air humide, on négligera l'advection et la vapeur sera supposée suivre une loi de Fick. Cette dernière hypothèse suppose que le nombre de Knudsen est suffisamment petit. Cependant, vu les dimensions de certains lumens, il est possible que le régime de diffusion de vapeur soit en fait intermédiaire entre le régime Fickien et de Knudsen. Dans ce cas, le coefficient de diffusion local pourra être remplacé par un coefficient effectif tenant compte de la diffusion de Knudsen en utilisant la relation de Bosanquet : $D_v^{-1} = D_K^{-1} + D_{v,\infty}^{-1}$ où D_v est le coefficient de diffusion effectif local de la vapeur, D_K est le coefficient de diffusion de Knudsen et $D_{v,\infty}$ est le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air.

III.3.1.1 Équations de conservation

Les fibres naturelles sont des milieux hétérogènes complexes. On distingue dans ce travail trois phases : l'air humide, l'eau liquide et la phase solide, notées respectivement g , l et s à cette échelle.

Afin d'écrire le problème microscopique, on fait l'hypothèse que les trois phases sont homogènes à l'échelle choisie.

❖ Chanvre (s)

Dans une première approche, la fibre de chanvre est supposée être un solide indéformable. Même si l'absorption d'eau par les fibres conduit à une modification de la microstructure des parois des cellules, ces modifications sont difficilement accessibles et ont lieu à des échelles encore plus fines que l'échelle étudiée ici. La prise en compte de ce phénomène de gonflement – qui reste cependant relativement modéré (inférieur à 5 %) peut éventuellement être réalisée à l'échelle de la fibre homogénéisée (Cáceres et al., 2007).

Une autre particularité des fibres végétales est que leur conductivité thermique est orthotrope et dépend donc de l'orientation locale de la fibre (J. F. Siau, 1984).

Conservation de l'énergie :

$$\rho_s(C_p)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_s \cdot \nabla T_s) \quad (\text{III.18})$$

❖ Eau liquide (l)

Compte tenu des hypothèses formulées précédemment, le mouvement de l'eau liquide est négligé par rapport au phénomène de transfert d'humidité sous forme de vapeur et aux possibles changements de phase (sorption, condensation).

Conservation de l'énergie :

$$\rho_l(C_p)_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial t} \right) = \lambda_l \Delta T_l \quad (\text{III.19})$$

❖ Air humide (g)

On décompose les vitesses \mathbf{v}_i d'une espèce i en vitesse moyenne \mathbf{v} et vitesse de diffusion \mathbf{u}_i :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{u}_i \quad (\text{III.20})$$

L'air humide est supposé incompressible et on néglige l'advection / la convection. On s'intéresse donc uniquement au transfert de la vapeur.

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{u}_v) = 0 \quad (\text{III.21})$$

avec $\rho_v \mathbf{u}_v = -\rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right)$ le flux diffusif de la vapeur, soit :

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = D_v \Delta \rho_v \quad (\text{III.22})$$

Conservation de l'énergie :

$$\rho_g (C_p)_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial t} \right) = \lambda_g \Delta T_g \quad (\text{III.23})$$

III.3.1.2 Conditions aux limites

Dans la suite, on suppose la continuité de la température aux différentes interfaces. On notera que ces conditions pourraient ne pas être valables pour certains petits lumens, en fonction du nombre de Knudsen. Cette hypothèse de continuité sera malgré tout utilisée dans tous les cas dans cette première approche.

L'adsorption d'eau à l'interface air humide / solide ainsi que la condensation à l'interface eau liquide / air humide sont prises en compte dans notre modèle.

❖ Interface gaz – chanvre

Continuité de la température :

$$T_s = T_g \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.24})$$

Adsorption de la vapeur :

$$\rho_v \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_{gs} = \dot{m}_{sorp} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.25})$$

Le taux massique d'adsorption \dot{m}_{sorp} peut se mettre sous la forme :

$$\dot{m}_{sorp} = \frac{\partial \rho_{vs}}{\partial t} \quad (\text{III.26})$$

où ρ_{vs} correspond à une densité surfacique d'eau absorbée, que l'on peut exprimer comme :

$$\frac{\partial \rho_{vs}}{\partial t} = k_v (1 - \theta) \rho_v - k_{-v} \rho_{vs} \quad (\text{III.27})$$

avec k_v et k_{-v} les coefficients de sorption et désorption et θ la fraction de surface recouverte. On peut exprimer ce terme sous une forme simplifiée (Valdes-Parada et al., 2009) :

$$\dot{m}_{sorp} = -K \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.28})$$

Compte tenu de l'adsorption, la conservation de l'énergie à l'interface s'écrit (Whitaker, 1989) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_{sv}\rho_{sv}) = \rho_v h_v \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_{gs} + (\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_s) \cdot \mathbf{n}_{gs} \quad (\text{III.29})$$

où h_{sv} est l'enthalpie massique de l'eau adsorbée et \mathbf{q}_g et \mathbf{q}_s sont les flux de chaleur par conduction à l'interface, donnés par la loi de Fourier.

En développant :

$$h_{sv} \frac{\partial \rho_{sv}}{\partial t} + \rho_{sv} \frac{\partial h_{sv}}{\partial t} = \rho_v h_v \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_{gs} + (\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_s) \cdot \mathbf{n}_{gs} \quad (\text{III.30})$$

Comme on a :

$$\rho_v \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_{gs} = \dot{m}_{sorp} = \frac{\partial \rho_{sv}}{\partial t} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.31})$$

Il vient :

$$\rho_{sv} \frac{\partial h_{sv}}{\partial t} + (h_{sv} - h_v) \dot{m}_{sorp} = (\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_s) \cdot \mathbf{n}_{gs} \quad (\text{III.32})$$

Si on suppose le problème local comme étant quasi-statique (Whitaker, 1986) et en notant $\Delta h_{sorp} = h_{sv} - h_v$, alors on obtient la condition suivante :

$$\Delta h_{sorp} \dot{m}_{sorp} = (\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_s) \cdot \mathbf{n}_{gs} \quad (\text{III.33})$$

Liquide – Chanvre :

Continuité de la température :

$$T_s = T_l \quad \text{sur } S_{ls} \quad (\text{III.34})$$

Continuité du flux de chaleur :

$$\lambda_s \cdot \nabla T_s \cdot \mathbf{n}_{sl} = \lambda_l \cdot \nabla T_l \cdot \mathbf{n}_{sl} \quad \text{sur } S_{ls} \quad (\text{III.35})$$

Liquide – Gaz :

Continuité de la température :

$$T_l = T_g \quad \text{sur } S_{lg} \quad (\text{III.36})$$

En tenant compte de la condensation, la conservation de la masse s'écrit :

$$\rho_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} = -\rho_v (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_{lg} = \dot{m}_{cond} \quad (\text{III.37})$$

où \mathbf{w} est la vitesse de l'interface et \dot{m}_{cond} , le taux de condensation massique.

La conservation de l'énergie s'écrit :

$$-\rho_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} + \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{n}_{lg} = \rho_v h_v (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_{lg} + \mathbf{q}_g \cdot \mathbf{n}_{lg} \quad (\text{III.38})$$

En faisant apparaitre le taux de condensation \dot{m}_{cond} , on a :

$$(\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_g) \cdot \mathbf{n}_{lg} = \dot{m}_{cond} (h_l - h_v) \quad (\text{III.39})$$

Ou encore, en notant l'enthalpie de condensation $\Delta h_{cond} = h_l - h_v$:

$$\mathbf{q}_l \cdot \mathbf{n}_{lg} = \mathbf{q}_g \cdot \mathbf{n}_{lg} = \dot{m}_{cond} \Delta h_{cond} \quad (\text{III.40})$$

Enfin, on supposera l'équilibre thermodynamique local à l'interface liquide / gaz (Whitaker, 1998) ce qui permet de relier la pression partielle à la température grâce à la relation de Clausius-Clapeyron :

$$\rho_v = \frac{p_v^\circ}{R_v T_g} \exp \left(\frac{\Delta h_{vap}}{R_v} \left(\frac{1}{T_g} - \frac{1}{T_g^\circ} \right) \right) \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.41})$$

III.3.2 Homogénéisation des fibres

Les propriétés physiques sont considérées constantes dans le volume de prise de moyenne, comme la masse volumique, la chaleur massique ainsi que la conductivité de l'eau et de l'air humide. La conductivité thermique des fibres de chanvre est par contre variable spatialement et dépend de l'orientation locale de la fibre.

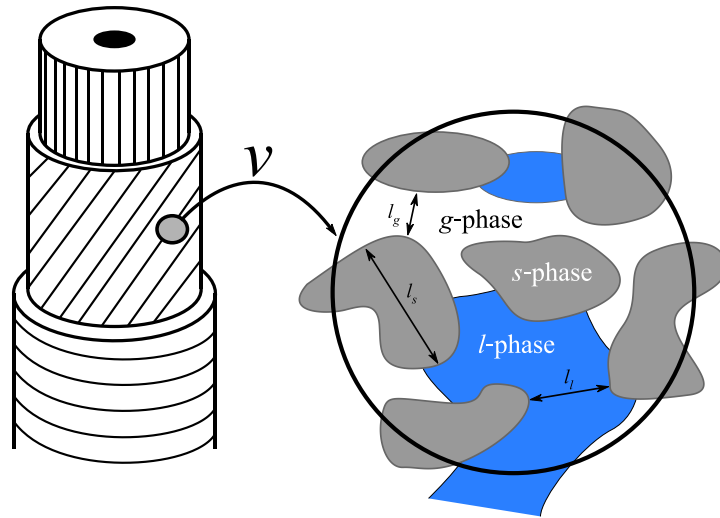


Figure III-4 : Premier changement d'échelle au sein de la fibre.

III.3.2.1 -Conservation de l'énergie

❖ Chanvre (s)

On moyenne l'équation de transfert locale :

$$\langle \rho_s(C_p) \rangle_s \frac{\partial \langle T_s \rangle}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_s \cdot \nabla T_s) \quad (\text{III.42})$$

Comme le domaine d'intégration est constant dans le temps, on peut sortir la dérivée temporelle de l'intégrale du membre gauche. En appliquant le théorème de prise de moyenne, on obtient :

$$\rho_s(C_p)_s \frac{\partial \langle T_s \rangle}{\partial t} = \nabla \cdot \langle (\lambda_s \cdot \nabla T_s) \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_{sl}} \lambda_s \cdot \nabla T_s \cdot \mathbf{n}_{sl} dS + \frac{1}{V} \int_{S_{sg}} \lambda_s \cdot \nabla T_s \cdot \mathbf{n}_{sg} dS \quad (\text{III.43})$$

On développe le premier terme du premier membre de droite en utilisant la décomposition de Gray :

$$\nabla \cdot \langle \lambda_s \cdot \nabla T_s \rangle = \nabla \cdot \langle \langle \lambda_s \rangle^s \cdot (\nabla \langle T_s \rangle^s + \nabla \tilde{T}_s) + \tilde{\lambda}_s \cdot (\nabla \langle T_s \rangle^s + \nabla \tilde{T}_s) \rangle \quad (\text{III.44})$$

En utilisant à nouveau le théorème de prise de moyenne, on peut exprimer $\langle \lambda_s \cdot \nabla T_s \rangle$ comme :

$$\begin{aligned} \langle \lambda_s \cdot \nabla T_s \rangle &= \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \epsilon_s \nabla \langle T_s \rangle^s + \underbrace{\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \nabla \langle \tilde{T}_s \rangle}_{=0} + \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \tilde{T}_s \cdot \mathbf{n}_{si} dS \right) \\ &\quad + \underbrace{\langle \tilde{\lambda}_s \rangle}_{=0} \cdot \epsilon_s \nabla \langle T_s \rangle^s + \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

On note ici que les fractions volumiques sont considérées constantes au sein du VER, puisque ce sont des paramètres macroscopiques.

Finalement :

$$\nabla \cdot \langle \lambda_s \cdot \nabla T_s \rangle = \nabla \cdot \left(\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \left(\epsilon_s \nabla \langle T_s \rangle^s + \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \tilde{T}_s \cdot \mathbf{n}_{si} dS \right) \right) + \nabla \cdot \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle \quad (\text{III.46})$$

On en déduit l'équation de conservation de l'énergie pour la phase solide :

$$\begin{aligned} \epsilon_s \rho_s (C_p)_s \frac{\partial \langle T_s \rangle^s}{\partial t} &= \nabla \cdot \left(\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \epsilon_s \nabla \langle T_s \rangle^s + \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{si} dS + \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle \right) \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \cdot \mathbf{n}_{si} dS \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

On note que cette équation macroscopique est *non fermée*, c'est-à-dire qu'il reste des termes microscopiques au sein des intégrales surfaciques. La procédure de fermeture sera détaillée par la suite.

❖ Eau liquide (l)

Le volume de la phase liquide $V_l(t)$ (noté simplement V_l par la suite) n'est pas constant car on tient compte de l'adsorption / désorption ainsi que de la condensation / évaporation. En intégrant l'équation locale, on obtient :

$$\frac{1}{V} \int_{V_l} \rho_l (C_p)_l \frac{\partial T_l}{\partial t} dV = \frac{1}{V} \int_{V_l} \lambda_l \nabla \cdot \nabla T_l dV \quad (\text{III.48})$$

On utilise le théorème de Reynolds pour exprimer le membre de gauche :

$$\frac{1}{V} \int_{V_l} \rho_l (C_p)_l \frac{\partial T_l}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \int_{V_l} \rho_l (C_p)_l T_l dV \right) - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_l (C_p)_l (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg}) T_l dS \quad (\text{III.49})$$

Comme la vitesse est nulle à l'interface solide-liquide, le dernier terme ne tient compte que de l'interface liquide-gaz.

En utilisant le théorème de prise de moyenne sur le membre de droite de l'équation (III.48), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \rho_l (C_p)_l \frac{\partial \langle T_l \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_l (C_p)_l (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg}) T_l dS \\ = \lambda_l \Delta \langle T_l \rangle + \nabla \cdot \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} T_l \mathbf{n}_{li} dS + \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \nabla T_l \cdot \mathbf{n}_{li} dS \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

Même si la fraction massique d'eau est une fonction du temps et de l'espace, on suppose ici qu'elle peut être considérée comme constante au sein du volume de moyenne. En faisant apparaître la moyenne intrinsèque, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \rho_l(C_p)_l \left(\epsilon_l \frac{\partial \langle T_l \rangle^l}{\partial t} + \langle T_l \rangle^l \frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} \right) - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_l(C_p)_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} T_l dS \\ = \lambda_l \epsilon_l \Delta \langle T_l \rangle^l + \nabla \cdot \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} T_l \mathbf{n}_{li} dS + \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \nabla T_l \cdot \mathbf{n}_{li} dS \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

La variation temporelle de la fraction volumique d'eau liquide est reliée au taux moyen de condensation à l'interface eau-air humide ainsi qu'au taux moyen d'adsorption à l'interface solide-air humide :

$$\frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} = \frac{\langle \dot{m}_{cond} \rangle + \langle \dot{m}_{sorp} \rangle}{\rho_l} \quad (\text{III.52})$$

Avec le taux de condensation défini par :

$$\langle \dot{m}_{cond} \rangle = \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg(t)} dS \quad (\text{III.53})$$

et le taux moyen d'adsorption :

$$\langle \dot{m}_{sorp} \rangle = \frac{1}{V} \int_{S_{ls}} \rho_v \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_{gs(t)} dS \quad (\text{III.54})$$

En notant $\langle \dot{m}_l \rangle = \langle \dot{m}_{cond} \rangle + \langle \dot{m}_{sorp} \rangle$ le taux de changement de phase total, on a :

$$\begin{aligned} \epsilon_l \rho_l(C_p)_l \frac{\partial \langle T_l \rangle^l}{\partial t} + (C_p)_l \langle T_l \rangle^l \langle \dot{m}_l \rangle - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_l(C_p)_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} T_l dS \\ = \lambda_l \epsilon_l \Delta \langle T_l \rangle^l + \nabla \cdot \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} T_l \mathbf{n}_{li} dS + \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \nabla T_l \cdot \mathbf{n}_{li} dS \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

Le terme $(C_p)_l \langle T_l \rangle^l \langle \dot{m}_l \rangle$ peut-être développé comme suit en introduisant les déviations :

$$(C_p)_l \langle T_l \rangle^l \langle \dot{m}_{cond} \rangle - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_l(C_p)_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} T_l dS = -\frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_l(C_p)_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} \tilde{T}_g dS \quad (\text{III.56})$$

Ce qui permet de simplifier l'équation (III.55) :

$$\begin{aligned} \epsilon_l \rho_l(C_p)_l \frac{\partial \langle T_l \rangle^l}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_l(C_p)_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} \tilde{T}_g dS \\ = \lambda_l \epsilon_l \Delta \langle T_l \rangle^l + \nabla \cdot \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} T_l \mathbf{n}_{li} dS + \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \nabla T_l \cdot \mathbf{n}_{li} dS \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

❖ *Air humide (g)*

En procédant de la même manière que pour la phase liquide, on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon_g \rho_g (C_p)_g \frac{\partial \langle T_g \rangle^g}{\partial t} + \rho_g (C_p)_g \langle T_g \rangle^g \frac{\partial \epsilon_g}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_g (C_p)_g (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{gl}) T_g dS \\ = \lambda_g \Delta \langle T_g \rangle + \lambda_g \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{li}} T_g \mathbf{n}_{gi} dS \right) + \lambda_g \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{li}} \nabla T_g \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

On a de plus la relation entre ϵ_g et ϵ_l :

$$\frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} = \frac{\langle \dot{m}_l \rangle}{\rho_l} = - \frac{\partial \epsilon_g}{\partial t} \quad (\text{III.59})$$

Si on suppose comme précédemment que ϵ_g est à peu près constant au sein du VER, cela nous permet d'écrire l'équation non fermée de conservation de l'énergie au sein de la phase gazeuse :

$$\begin{aligned} \epsilon_g \rho_g (C_p)_g \frac{\partial \langle T_g \rangle^g}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_g (C_p)_g (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{gl}) \tilde{T}_g dS \\ = \lambda_g \epsilon_g \Delta \langle T_g \rangle + \lambda_g \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{li}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gi} dS \right) \\ + \lambda_g \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{li}} \nabla T_g \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

❖ *Équilibre thermique local*

La prise de moyenne des équations de conservation de l'énergie permet d'obtenir trois équations macroscopiques gouvernant les trois températures moyennes de chaque phase. Lorsque ces températures moyennes sont suffisamment proches, il est possible d'utiliser une seule température moyenne pour décrire le problème. Cette condition d'équilibre thermique local est fonction des temps caractéristiques et des contrastes de conductivité thermique. Dans le cas de matériaux isolants à base de fibres végétales utilisés dans le bâtiment, Lux, (2005) a montré que l'ETL s'établissait très rapidement (de l'ordre de quelques secondes). On suppose donc ici que les températures moyennes sont égales à la température moyenne notée $\langle T \rangle$: $\langle T_l \rangle^l = \langle T_g \rangle^g = \langle T_s \rangle^s = \langle T \rangle$. On peut alors sommer les trois équations de conservations de chacune des phases.

$$\begin{aligned}
& \left(\epsilon_g \rho_g (C_p)_g + \epsilon_l \rho_l (C_p)_l + \epsilon_s \rho_s (C_p)_s \right) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle T \rangle \langle \dot{m}_l \rangle \left((C_p)_l - \frac{\rho_g}{\rho_l} (C_p)_g \right) \\
& - \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} \left(\rho_g (C_p)_g - \rho_l (C_p)_l \right) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{gl} T_g dS \\
& = \nabla \cdot \left[\left(\epsilon_g \lambda_g \mathbf{I} + \epsilon_l \lambda_l \mathbf{I} + \epsilon_s \langle \lambda_s \rangle^s \right) \cdot \nabla \langle T \rangle + \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle \right] + \nabla \\
& \cdot \left(\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{si} dS \right) + \lambda_g \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gi} dS \right) \lambda_l \nabla \\
& \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \tilde{T}_l \mathbf{n}_{li} dS \right) - \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} (\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_l) \cdot \mathbf{n}_{gl} dS \\
& - \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} (\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_s) \cdot \mathbf{n}_{gs} dS - \frac{1}{V} \int_{S_{ls}} (\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_s) \cdot \mathbf{n}_{ls} dS
\end{aligned} \tag{III.61}$$

où les $\mathbf{q}_i = -\lambda_i \cdot \nabla T_i$ sont les flux par conduction. D'après les conditions aux limites, on a :

$$-\frac{1}{V} \int_{S_{gl}} (\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_l) \cdot \mathbf{n}_{gl} dS = -\frac{1}{V} \int_{S_{gl}} (h_l - h_v) \dot{m}_{cond} dS = -\langle \Delta h_{cond} \dot{m}_{cond} \rangle \tag{III.62}$$

Ainsi que :

$$-\frac{1}{V} \int_{S_{gs}} (\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_s) \cdot \mathbf{n}_{gs} dS = -\frac{1}{V} \int_{S_{gs}} \Delta h_{sorp} \dot{m}_{sorp} dS = -\langle \Delta h_{cond} \dot{m}_{cond} \rangle \tag{III.63}$$

Et :

$$-\frac{1}{V} \int_{S_{ls}} (\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_s) \cdot \mathbf{n}_{ls} dS = 0 \tag{III.64}$$

En notant $\langle \rho C_p \rangle = \epsilon_g \rho_g (C_p)_g + \epsilon_l \rho_l (C_p)_l + \epsilon_s \rho_s (C_p)_s$, l'équation (III.61) devient :

$$\begin{aligned}
 & \langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle T \rangle \langle \dot{m}_{sorp} \rangle \left((C_p)_l - \frac{\rho_g}{\rho_l} (C_p)_g \right) \\
 & + \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} \left(\rho_g (C_p)_g - \rho_l (C_p)_l \right) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{gl} \tilde{T}_g dS + \langle \Delta h_{cond} \dot{m}_{cond} \rangle \\
 & + \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} h_v \dot{m}_{sorp} dS \\
 & = \nabla \cdot \left[(\epsilon_g \lambda_g \mathbf{I} + \epsilon_l \lambda_l \mathbf{I} + \epsilon_s \langle \lambda_s \rangle^s) \cdot \nabla \langle T \rangle + \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle \right] + \nabla \\
 & \cdot \left(\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{si} dS \right) + \lambda_g \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gi} dS \right) + \lambda_l \nabla \\
 & \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \tilde{T}_l \mathbf{n}_{li} dS \right)
 \end{aligned} \tag{III.65}$$

D'après Whitaker, (1998), la chaleur sensible transférée à l'interface liquide-gaz est négligeable devant la chaleur latente de condensation.

$$\left(\rho_g (C_p)_g - \rho_l (C_p)_l \right) \tilde{T}_g \ll \Delta h_{cond} \tag{III.66}$$

D'autre part, en développant les termes relatifs à la sorption, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 & \langle T \rangle \langle \dot{m}_{sorp} \rangle \left((C_p)_l - \frac{\rho_g}{\rho_l} (C_p)_g \right) + \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} \Delta h_{sorp} \dot{m}_{sorp} dS \\
 & = \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} \left(\langle T \rangle \left((C_p)_l - \frac{\rho_g}{\rho_l} (C_p)_g \right) + \Delta h_{sorp} \right) \dot{m}_{sorp} dS
 \end{aligned} \tag{III.67}$$

L'enthalpie de sorption étant supérieure à celle de condensation, on peut de la même manière que précédemment, supposer que :

$$\langle T \rangle \left((C_p)_l - \frac{\rho_g}{\rho_l} (C_p)_g \right) \ll \Delta h_{sorp} \tag{III.68}$$

L'équation de conservation prend alors la forme simplifiée :

$$\begin{aligned}
 \langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle \Delta h_{sorp} \dot{m}_{sorp} \rangle + \langle \Delta h_{cond} \dot{m}_{cond} \rangle \\
 = \nabla \cdot [(\epsilon_g \lambda_g \mathbf{I} + \epsilon_l \lambda_l \mathbf{I} + \epsilon_s \langle \lambda_s \rangle^s) \cdot \nabla \langle T \rangle + \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle] + \\
 \nabla \cdot \left(\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{si} dS \right) + \lambda_g \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gi} dS \right) + \\
 \lambda_l \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \tilde{T}_l \mathbf{n}_{li} dS \right)
 \end{aligned} \tag{III.69}$$

Ici, on notera que Δh_{sorp} varie localement en fonction de la température, mais aussi du type de site d'adsorption et de la quantité d'eau déjà adsorbée localement.

En développant les intégrales surfaciques du membre de droite de l'équation précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{si} dS + \lambda_g \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gi} dS \right) + \lambda_l \left(\frac{1}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \tilde{T}_l \mathbf{n}_{li} dS \right) \\
 = \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \int_{S_{sl}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{sl} dS + \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \int_{S_{sg}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{sg} dS + \lambda_g \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gl} dS \\
 + \lambda_g \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gs} dS + \lambda_l \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \tilde{T}_l \mathbf{n}_{lg} dS + \lambda_l \frac{1}{V} \int_{S_{ls}} \tilde{T}_l \mathbf{n}_{ls} dS \\
 = \frac{\langle \lambda_s \rangle^s - \lambda_l \mathbf{I}}{V} \int_{S_{sl}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{sl} dS + \frac{\langle \lambda_s \rangle^s - \lambda_g \mathbf{I}}{V} \int_{S_{sg}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{sg} dS \\
 + \frac{\lambda_g - \lambda_l}{V} \int_{S_{gl}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gl} dS
 \end{aligned} \tag{III.70}$$

Finalement, on obtient la forme non fermée de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 \langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle \Delta h_{sorp} \dot{m}_{sorp} \rangle + \langle \Delta h_{cond} \dot{m}_{cond} \rangle \\
 = \nabla \cdot [(\epsilon_g \lambda_g \mathbf{I} + \epsilon_l \lambda_l \mathbf{I} + \epsilon_s \langle \lambda_s \rangle^s) \cdot \nabla \langle T \rangle + \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle] + \nabla \cdot \\
 \cdot \left(\frac{\langle \lambda_s \rangle^s - \lambda_l \mathbf{I}}{V} \int_{S_{sl}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{sl} dS + \frac{\langle \lambda_s \rangle^s - \lambda_g \mathbf{I}}{V} \int_{S_{sg}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{sg} dS \right. \\
 \left. + \frac{\lambda_g - \lambda_l}{V} \int_{S_{gl}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gl} dS \right)
 \end{aligned} \tag{III.71}$$

III.3.2.2 Conservation de la masse

Dans ce travail, on rappelle que l'on néglige le déplacement de l'eau liquide ainsi que de l'air humide. La conservation de la masse concerne donc la vapeur d'eau ainsi que les équations reliant les évolutions des fractions volumiques d'eau liquide et d'air humide.

La relation entre la fraction massique du gaz avec le taux de condensation moyen est exprimée par :

$$\frac{\langle \dot{m}_{cond} \rangle + \langle \dot{m}_{sorp} \rangle}{\rho_l} = -\frac{\partial \epsilon_g}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} = \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} dS + \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} \frac{\rho_v}{\rho_l} \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_{gs} dS \quad (III.72)$$

La conservation de la masse de vapeur se met sous la forme :

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{u}_v) = 0 \quad (III.73)$$

En appliquant le théorème de Reynolds :

$$\left\langle \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \int_{V_l} \rho_v dV \right) - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_v \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{gl} dS \quad (III.74)$$

D'où :

$$\epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \langle \rho_v \rangle^g \frac{\partial \epsilon_g}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \rho_v \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{gl} dS + \langle \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{u}_v) \rangle = 0 \quad (III.75)$$

En appliquant le théorème de prise de moyenne et en remplaçant $\frac{\partial \epsilon_g}{\partial t}$ par son expression en fonction des intégrales de surface (III.72) l'équation devient :

$$\begin{aligned} \epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \underbrace{\rho_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{gl}}_{=-\dot{m}_{cond}} dS + \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} \underbrace{\rho_v (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_{gl}}_{=\dot{m}_{cond}} dS \\ - \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \underbrace{\rho_v \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_{gs}}_{=\dot{m}_{sorp}} dS + \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} \underbrace{\rho_v \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_{gs}}_{=\dot{m}_{sorp}} dS + \langle \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{u}_v) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (III.76)$$

Ce qui donne :

$$\epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \langle \dot{m}_{cond} \rangle \left(1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \right) + \langle \dot{m}_{sorp} \rangle \left(1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \right) + \langle \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{u}_v) \rangle = 0 \quad (III.77)$$

En remplaçant $\rho_v \mathbf{u}_v = -D_v \nabla \rho_v$, il vient :

$$\epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \langle \dot{m}_l \rangle \left(1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \right) = D_v \nabla \cdot \langle \nabla \rho_v \rangle \quad (III.78)$$

Finalement, en appliquant encore une fois le théorème de prise de moyenne on obtient l'équation moyenne non fermée de conservation de la vapeur :

$$\epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \langle \dot{m}_l \rangle \left(1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \right) = \epsilon_g D_v \Delta \langle \rho_v \rangle^g + \nabla \cdot \left(\frac{D_v}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \tilde{\rho}_v \mathbf{n}_{gi} dS \right) \quad (\text{III.79})$$

III.4 FERMETURE A L'ECHELLE DE LA FIBRE

On cherche maintenant à exprimer les déviations en fonction des termes moyens afin de fermer les équations de conservation établies dans la section précédente. La méthode couramment employée consiste à introduire la décomposition de Gray dans les équations locales et de soustraire l'équation moyenne obtenue afin d'établir le problème microscopique gouvernant les déviations.

III.4.1 Conservation de l'énergie

❖ Air humide

En introduisant la décomposition de Gray et en multipliant par ϵ_g :

$$\epsilon_g \rho_g (C_p)_g \left(\frac{\partial \langle T_g \rangle^g}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial t} \right) = \epsilon_g \nabla \cdot (\lambda_g \nabla \langle T_g \rangle^g + \lambda_g \nabla \tilde{T}_g) \quad (\text{III.80})$$

On soustrait l'équation macroscopique non fermée (III.60) :

$$\begin{aligned} \epsilon_g \rho_g (C_p)_g \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} \rho_g (C_p)_g (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{gl}) \tilde{T}_g dS \\ = \epsilon_g \nabla \cdot (\lambda_g \nabla \tilde{T}_g) - \lambda_g \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gi} dS \right) \\ - \lambda_g \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \nabla \tilde{T}_g \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

❖ Eau liquide

En procédant de même on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon_l \rho_l (C_p)_l \frac{\partial \tilde{T}_l}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} \rho_l (C_p)_l (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg}) \tilde{T}_l dS \\ = \epsilon_l \nabla \cdot (\lambda_l \nabla \tilde{T}_l) - \nabla \cdot \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{gi}} \tilde{T}_l \mathbf{n}_{li} dS - \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{gi}} \nabla \tilde{T}_l \cdot \mathbf{n}_{li} dS \end{aligned} \quad (\text{III.82})$$

❖ *Chanvre*

Et enfin pour la phase solide :

$$\epsilon_s \rho_s (C_p)_s \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\epsilon_s \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s + \epsilon_s \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s - \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{si} dS - \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle \right) - \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} (\tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s + \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s) \cdot \mathbf{n}_{si} dS \quad (\text{III.83})$$

En remarquant que :

$$\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \tilde{T}_s \mathbf{n}_{si} dS = \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \langle \nabla \tilde{T}_s \rangle - \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \nabla \underbrace{\langle \tilde{T}_s \rangle}_{=0} = \langle \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle \quad (\text{III.84})$$

On a :

$$\epsilon_s \rho_s (C_p)_s \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial t} = \nabla \cdot (\epsilon_s \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s + \epsilon_s \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s - \epsilon_s \langle \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle^s) - \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} (\tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s + \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s) \cdot \mathbf{n}_{si} dS \quad (\text{III.85})$$

D'après la relation de séparation des échelles, on a les ordres de grandeur suivants :

$$\nabla \cdot \langle \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle^s = \mathcal{O} \left(\frac{\lambda_s \tilde{T}_s}{l_s L} \right) \quad (\text{III.86})$$

Et

$$\nabla \cdot (\epsilon_s \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s) = \mathcal{O} \left(\frac{\lambda_s \tilde{T}_s}{l_s^2} \right) \quad (\text{III.87})$$

D'où

$$\nabla \cdot \langle \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle^s \ll \nabla \cdot (\epsilon_s \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s), \quad (\text{III.88})$$

Ce qui permet finalement d'écrire :

$$\begin{aligned} \epsilon_s \rho_s (C_p)_s \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial t} = \nabla \cdot (\epsilon_s \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s + \epsilon_s \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s) \\ - \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} (\tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s + \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s) \cdot \mathbf{n}_{si} dS \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

III.4.2 Conservation de la masse de vapeur

On procède de la même manière comme avant, on obtient alors :

$$\epsilon_g \frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial t} - \langle \dot{m}_l \rangle \left(1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \right) = \epsilon_g D_v \Delta \tilde{\rho}_v - D_v \nabla \cdot \sum_{i=l,s} \frac{1}{V} \int_{S_{gi}} \tilde{\rho}_v \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.90})$$

III.4.3 Conditions aux limites

❖ *Interface chanvre - air humide*

Continuité de la température :

$$\tilde{T}_s = \tilde{T}_g \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.91})$$

Conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{gs} \cdot (\lambda_g \nabla \tilde{T}_g) = \mathbf{n}_{gs} \cdot \lambda_s \cdot \nabla \tilde{T}_s + \underbrace{\mathbf{n}_{sg} \cdot (\lambda_s - \lambda_g \mathbf{I}) \cdot \nabla \langle T \rangle}_{\text{source de gradient de température}} + \mathbf{n}_{sg} \\ \cdot (\Delta h_{sorp} D_v \nabla \tilde{\rho}_v) + \underbrace{\mathbf{n}_{sg} \cdot (\Delta h_{sorp} D_v \nabla \langle \rho_v \rangle^g)}_{\text{source enthalpie d adsorption}} \quad \text{sur } S_{gs} \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

Conservation de la masse :

$$\rho_v \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_{sg} = \dot{m}_{sorp} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.93})$$

L'équation (III.93) peut se récrire :

$$-D_v \nabla \tilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{gs} = D_v \nabla \langle \rho_v \rangle^v \cdot \mathbf{n}_{gs} + \dot{m}_{sorp} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.94})$$

Dans le cas où on suppose $\dot{m}_{sorp} = K \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$, on aurait :

$$-D_v \nabla \tilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{gs} = D_v \nabla \langle \rho_v \rangle^v \cdot \mathbf{n}_{gs} - \underbrace{K \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t}}_{\text{terme source}} - \underbrace{K \frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial t}}_{\text{négligé si quasi statique}} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.95})$$

Nous montrerons par la suite que le problème aux déviations peut être considéré comme quasi-statique sous certaines hypothèses. Dans ce cas, la condition précédente s'écrit :

$$-D_v \nabla \tilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{gs} = D_v \nabla \langle \rho_v \rangle^v \cdot \mathbf{n}_{gs} - \underbrace{K \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t}}_{\text{terme source}} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.96})$$

❖ *Interface solide - eau*

Continuité de la température :

$$\tilde{T}_s = \tilde{T}_l \quad \text{sur } S_{ls} \quad (\text{III.97})$$

Conservation de l'énergie :

$$\mathbf{n}_{sl} \cdot \boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s = \mathbf{n}_{sl} \cdot \lambda_l \nabla \tilde{T}_l + \mathbf{n}_{sl} \cdot (\lambda_l \mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda}_s) \cdot \nabla \langle T \rangle \quad \text{sur } S_{ls} \quad (\text{III.98})$$

❖ *Interface air humide - eau*

Continuité de la température :

$$\tilde{T}_l = \tilde{T}_g \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.99})$$

Conservation de l'énergie :

$$\mathbf{n}_{lg} \cdot \lambda_l \nabla \tilde{T}_l = \mathbf{n}_{lg} \cdot \lambda_g \nabla \tilde{T}_g + (\lambda_g - \lambda_l) \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla \langle T \rangle + \dot{m}_{cond} \Delta h_{cond} \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.100})$$

Conservation de la masse :

$$\rho_v (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_{lg} = -\rho_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} = -\dot{m}_{cond} \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.101})$$

L'équation (III.101) peut s'écrire sous la forme :

$$-D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{lg} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} (\rho_v - \rho_l) \quad (\text{III.102})$$

Comme on a

$$\rho_l \gg \rho_v \quad (\text{III.103})$$

Alors :

$$D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{lg} \simeq \rho_l \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg} = \dot{m}_{cond} \quad (\text{III.104})$$

En décomposant ρ_v , on obtient une nouvelle expression de (III.101) :

$$\dot{m}_{cond} = D_v \nabla \langle \rho_v \rangle^g \cdot \mathbf{n}_{lg} + D_v \nabla \tilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{lg} \quad (\text{III.105})$$

On peut alors exprimer l'équation (III.100) comme :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_{lg} \cdot \lambda_l \nabla \tilde{T}_l - \Delta h_{cond} (\mathbf{n}_{lg} \cdot D_v \nabla \tilde{\rho}_v) \\
 = \mathbf{n}_{lg} \cdot \lambda_g \nabla \tilde{T}_g + \underbrace{(\lambda_g - \lambda_l) \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla \langle T \rangle}_{\text{source de gradient de temperature}} \\
 + \underbrace{\Delta h_{cond} (\mathbf{n}_{lg} \cdot D_v \nabla \langle \rho_v \rangle^g)}_{\text{source de la chaleur de condensation}} \quad \text{sur } S_{gl}
 \end{aligned} \tag{III.106}$$

Si on suppose l'équilibre thermodynamique local au niveau de l'interface la condition (III.41) s'applique. Un développement de Taylor au premier ordre au voisinage de $\langle T \rangle$ permet d'écrire cette condition sous la forme :

$$\rho_v = F(\langle T \rangle) + \tilde{T}_g \frac{\partial F}{\partial T_g} \Big|_{T_g=\langle T \rangle} \quad \text{sur } S_{gl} \tag{III.107}$$

Avec

$$F(T) = \frac{p_v^0}{R_v T} \exp \left(\frac{\Delta h_{vap}}{R_v} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^0} \right) \right) f \quad \text{sur } S_{gl} \tag{III.108}$$

En développant ρ_v :

$$\langle \rho_v \rangle + \tilde{\rho}_v = F(\langle T \rangle) + \tilde{T}_g \frac{\partial F}{\partial T_g} \Big|_{T_g=\langle T \rangle} \quad \text{sur } S_{gl} \tag{III.109}$$

En suivant (Stephen Whitaker, 1998), on a finalement une condition qui couple le problème thermique et de transfert de vapeur :

$$\tilde{\rho}_v = \tilde{T}_g \frac{\partial F}{\partial T_g} \Big|_{T_g=\langle T \rangle} \quad \text{sur } S_{gl} \tag{III.110}$$

En développant :

$$\tilde{\rho}_v = -\tilde{T}_g \frac{p_v^0}{R_v \langle T \rangle^2} \left(1 + \frac{\Delta h_{vap}}{R_v \langle T \rangle} \right) \exp \left(\frac{\Delta h_{vap}}{R_v} \left(\frac{1}{\langle T \rangle} - \frac{1}{T^0} \right) \right) \quad \text{sur } S_{gl} \tag{III.111}$$

III.4.4 Variables de fermetures

Les conditions aux limites nous permettent finalement de mettre en évidence trois termes sources : $\nabla\langle\rho_v\rangle^g$, $\nabla\langle T\rangle$ et $\frac{\partial\langle\rho_v\rangle^g}{\partial t}$ (ce dernier terme apparaît uniquement pour le problème gouvernant $\tilde{\rho}_v$). On suppose donc que les déviations peuvent s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de ces sources :

$$\tilde{T}_g = \mathbf{b}_{gT} \cdot \nabla\langle T\rangle + \frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_g} \mathbf{b}_{gv} \cdot \nabla\langle\rho_v\rangle^g \quad (\text{III.112})$$

$$\tilde{T}_s = \mathbf{b}_{sT} \cdot \nabla\langle T\rangle + \frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_s^*} \mathbf{b}_{sv} \cdot \nabla\langle\rho_v\rangle^g \quad (\text{III.113})$$

$$\tilde{T}_l = \mathbf{b}_{lT} \cdot \nabla\langle T\rangle + \frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_l} \mathbf{b}_{lv} \cdot \nabla\langle\rho_v\rangle^g \quad (\text{III.114})$$

$$\tilde{\rho}_v = \mathbf{d}_{gv} \cdot \nabla\langle\rho_v\rangle^g + \frac{\lambda_g}{\Delta h^* D_v} \mathbf{d}_{gT} \cdot \nabla\langle T\rangle + d_{gsv} \frac{\partial\langle\rho_v\rangle^g}{\partial t} \quad (\text{III.115})$$

Les vecteurs \mathbf{b} , \mathbf{d} et le scalaire d_{gsv} sont appelées variables de fermeture puisqu'ils permettent d'exprimer la relation entre les déviations microscopiques et les variables moyennes. La connaissance de ces variables permet ainsi de fermer le problème macroscopique. Pour ce faire, il faut écrire les problèmes gouvernant les variables de fermeture et résoudre les problèmes obtenus sur des microstructures réalistes.

III.4.5 Problèmes de fermetures

III.4.5.1 Conservation de l'énergie

Une des hypothèses courantes pour simplifier les problèmes de fermeture est de les considérer comme étant quasi-statiques. Pour l'ensemble des problèmes, cette hypothèse est acceptable si le terme diffusif est très grand devant la dérivée temporelle :

$$\rho_i(C_p)_i \frac{\partial\tilde{T}_i}{\partial t} \ll \nabla \cdot (\lambda_i \nabla \tilde{T}_i) \quad (\text{III.116})$$

En utilisant les ordres de grandeurs suivants :

$$\rho_i(C_p)_i \frac{\partial\tilde{T}_i}{\partial t} = o\left(\rho_i(C_p)_i \frac{\tilde{T}_i}{t}\right) \quad (\text{III.117})$$

Et :

$$\nabla \cdot (\lambda_i \nabla \tilde{T}_i) = o\left(\lambda_i \frac{\tilde{T}_i}{l^2}\right) \quad (\text{III.118})$$

L'hypothèse de quasi-staticité est donc valable pour des temps caractéristiques vérifiant :

$$t \gg \mathcal{O} \left(\rho_i (C_p)_i \frac{l_i^2}{\lambda_i} \right) \quad (\text{III.119})$$

Vu les dimensions caractéristiques de la petite échelle (cf section II.3.1), cette hypothèse est largement justifiée en pratique.

❖ *Air humide*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} \rho_g (C_p)_g (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg}) \tilde{T}_g dS \\ &= \epsilon_g \nabla \cdot (\lambda_g \nabla \tilde{T}_g) - \lambda_g \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gi} dS \right) \\ & - \lambda_g \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \nabla \tilde{T}_g \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \end{aligned} \quad (\text{III.120})$$

En rappelant que $\rho_l (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg}) \simeq D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{lg}$, on peut estimer l'ordre de grandeur de l'intégrale du membre de gauche par : On néglige le terme du membre de gauche, comme on a déjà supposé quasi statique ce qui implique des vitesses d'interfaces nulles.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} \rho_g (C_p)_g (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{lg}) \tilde{T}_g dS &\simeq \frac{1}{V} \int_{S_{gl}} \frac{\rho_g}{\rho_l} D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{lg} \tilde{T}_g dS \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{\rho_g (C_p)_g D_v \rho_v S_{gl} \tilde{T}_g}{\rho_l l_g V} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.121})$$

Cet ordre de grandeur est probablement très surestimé, car on ne tient pas compte du produit scalaire avec la normale \mathbf{n}_{gl} . Ce terme est donc négligeable devant le terme diffusif si la contrainte suivante est vérifiée :

$$\frac{\rho_g (C_p)_g D_v \rho_v S_{gl} \tilde{T}_g}{\rho_l l_g V} \ll \frac{\epsilon_g \tilde{T}_g \lambda_g}{l_g^2} \quad (\text{III.122})$$

soit :

$$l_g \rho_g (C_p)_g D_v \rho_v S_{gl} \ll \epsilon_g \lambda_g V \rho_l \quad (\text{III.123})$$

Si on considère que les hypothèses suivantes :

$$\rho_g = 1 \text{ kg.m}^{-3},$$

$$(C_p)_g = 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\rho_v = 10^{-2} \text{ kg.m}^{-3} \text{ (ce qui correspond à une pression de vapeur de 1500 Pa à 20°C)}$$

$$\rho_l = 10^3 \text{ kg.m}^{-3},$$

$$\lambda_g = 0,026 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1},$$

$$\text{Et en prenant } D_v = 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$$

On obtient alors la contrainte

$$4 \cdot 10^{-6} l_g S_{gl} \ll \epsilon_g V \quad (\text{III.124})$$

Comme $l_g \ll V$, cette contrainte est a priori largement vérifiée, bien qu'il soit difficile d'évaluer la surface liquide-solide.

Le problème de fermeture prend alors une forme plus simple :

$$0 = \epsilon_g \nabla \cdot (\lambda_g \nabla \tilde{T}_g) - \lambda_g \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gi} dS \right) - \lambda_g \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \nabla \tilde{T}_g \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.125})$$

Le deuxième terme du membre de droite est négligeable par rapport au premier, en effet :

$$\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \tilde{T}_g \mathbf{n}_{gi} dS = \langle \nabla \tilde{T}_g \rangle - \underbrace{\nabla \langle \tilde{T}_g \rangle}_{=0} \quad (\text{III.126})$$

Donc on peut estimer les ordres de grandeurs suivants :

$$\nabla \cdot (\nabla \tilde{T}_g) = O\left(\frac{\tilde{T}_g}{l_g^2}\right)$$

$$\nabla \cdot \langle \nabla \tilde{T}_g \rangle = O\left(\frac{\tilde{T}_g}{l_g L}\right)$$

Et on peut donc négliger $\nabla \cdot \langle \nabla \tilde{T}_g \rangle$ devant $\nabla \cdot (\nabla \tilde{T}_g)$ car $L \gg l_g$.

Le problème local prend finalement la forme classique :

$$\nabla \cdot (\lambda_g \nabla \tilde{T}_g) = -\lambda_g \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \nabla \tilde{T}_g \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.127})$$

En remplaçant \tilde{T}_g et $\tilde{\rho}_v$ par leurs expressions en fonction des variables de fermeture (équations (III.112) et (III.115)) ainsi qu'en négligeant les dérivées du second ordre et plus des termes macroscopiques (par ex. $\nabla \nabla \langle T \rangle$), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\lambda_g \nabla \left(\mathbf{b}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle + \frac{\Delta h_{cond} D_v}{\lambda_g} \mathbf{b}_{gv} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \right) \right) \\ = \lambda_g \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \nabla \left(\mathbf{b}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle + \frac{\Delta h_{cond} D_v}{\lambda_g} \mathbf{b}_{gv} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \right) \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \end{aligned} \quad (III.128)$$

On rappelle ici que les variations des termes macroscopiques sont très faibles au sein du volume de prise de moyenne et, dans le cadre du problème local de fermeture, il est alors possible de considérer les dérivées du premier ordre comme étant constantes, ce qui permet de les mettre en facteur :

$$\begin{aligned} \lambda_g \Delta \mathbf{b}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle + \Delta h_{cond} D_v \Delta \mathbf{b}_{gv} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \\ = \lambda_g \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \nabla \mathbf{b}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \\ + \lambda_g \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \nabla \left(\frac{\Delta h_{cond} D_v}{\lambda_g} \mathbf{b}_{gv} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \right) \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \end{aligned} \quad (III.129)$$

Cette équation devant être valable quels que soient $\nabla \langle T \rangle$ et $\nabla \langle \rho_v \rangle^g$, on peut en tirer deux problèmes distincts :

Problème selon $\nabla \langle T \rangle$:

$$\begin{aligned} \lambda_g \Delta \mathbf{b}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle &= \lambda_g \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \nabla \mathbf{b}_{gT} (\mathbf{b}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle) \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \\ \Delta \mathbf{b}_{gT} &= \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{b}_{gT} dS \end{aligned} \quad (III.130)$$

Et selon $\nabla \langle \rho_v \rangle^g$

$$\Delta \mathbf{b}_{gv} = \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{b}_{gv} dS \quad (III.131)$$

❖ *Eau*

En procédant de manière similaire, on peut écrire le problème de fermeture dans la phase liquide :

$$\epsilon_l \nabla \cdot (\lambda_l \nabla \tilde{T}_l) = \frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \nabla \tilde{T}_l \cdot \mathbf{n}_{li} dS \quad (III.132)$$

On remplace \tilde{T}_l par son expression en fonction des variables de fermeture (III.114) dans l'équation (III.132) pour tirer les deux problèmes de fermetures associés.

Selon $\nabla\langle T \rangle$, on a :

$$\Delta \mathbf{b}_{lT} = \epsilon_l^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \mathbf{n}_{li} \cdot \nabla \mathbf{b}_{lT} dS \quad (\text{III.133})$$

Et selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\Delta \mathbf{b}_{lv} = \epsilon_l^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \mathbf{n}_{li} \cdot \nabla \mathbf{b}_{lv} dS \quad (\text{III.134})$$

❖ *Chanvre*

On tire de la même manière les deux problèmes de fermeture associés à la phase solide.

Selon $\nabla\langle T \rangle$:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s) = \frac{1}{\epsilon_s V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \mathbf{n}_{si} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s + \boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT}) dS \quad (\text{III.135})$$

Et selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv}) = \frac{1}{\epsilon_s V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \mathbf{n}_{si} \cdot (\boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv}) dS \quad (\text{III.136})$$

III.4.5.2 Conservation de la masse

Dans le cas de la conservation de la masse, l'hypothèse de quasi-staticité engendre la contrainte suivante :

$$t \gg \mathcal{O}\left(\frac{l_v^2}{D_v}\right) \quad (\text{III.137})$$

Ce qui est en pratique également largement vérifié.

L'équation (III.90) se simplifie alors comme suit :

$$\langle \dot{m}_l \rangle \left(1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \right) = \epsilon_g D_v \Delta \tilde{\rho}_v \quad (\text{III.138})$$

En notant que $\langle \rho_v \rangle^g \ll \rho_l$ on peut écrire :

$$\langle \dot{m}_l \rangle = \epsilon_g D_v \Delta \tilde{\rho}_v \quad (\text{III.139})$$

Soit en développant $\langle \dot{m}_l \rangle$:

$$-\frac{1}{V} \int_{S_{lg}} D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{gl} dS - \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{gs} dS = \epsilon_g D_v \Delta \tilde{\rho}_v \quad (\text{III.140})$$

En décomposant ρ_v et en utilisant (III.15), ces intégrales deviennent :

$$\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{gi} dS = \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \tilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.141})$$

Finalement, l'équation (III.140) devient :

$$\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \tilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{gi} dS = \epsilon_g D_v \Delta \tilde{\rho}_v \quad (\text{III.142})$$

En remplaçant $\tilde{\rho}_v$ par son expression en fonction des variables de fermeture associées (III.115) dans l'équation (III.142) on aura alors trois problèmes de fermetures.

Selon $\nabla \langle T \rangle$:

$$-\frac{1}{\epsilon_g V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gT} dS = \Delta \mathbf{d}_{gT} \quad (\text{III.143})$$

Selon $\nabla \langle \rho_v \rangle^g$:

$$-\frac{1}{\epsilon_g V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gv} dS = \Delta \mathbf{d}_{gv} \quad (\text{III.144})$$

Et selon $\frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t}$:

$$\epsilon_g D_v \Delta \mathbf{d}_{gsv} = -\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gsv} dS \quad (\text{III.145})$$

III.4.5.3 Synthèse des problèmes de fermetures

L'ensemble des problèmes de fermeture est synthétisé ci-dessous. Les équations obtenues sont toutes de type intégro-différentielles. On notera qu'il est possible de se ramener à des problèmes différentiels avec un changement de variable adéquate (M Quintard and Whitaker, 1993). Cependant les constantes intégrales sont généralement négligeables (Lux, 2005).

Selon $\nabla\langle T \rangle$:

$$\Delta \mathbf{b}_{gT} = \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{b}_{gT} dS \quad \text{dans } V_g \quad (\text{III.146})$$

$$\Delta \mathbf{b}_{lT} = \epsilon_l^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \mathbf{n}_{li} \cdot \nabla \mathbf{b}_{lT} dS \quad \text{dans } V_l \quad (\text{III.147})$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s) = \frac{1}{\epsilon_s V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \mathbf{n}_{si} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s + \boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT}) dS \quad \text{dans } V_s \quad (\text{III.148})$$

$$\Delta \mathbf{d}_{gT} = -\frac{1}{\epsilon_g V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi(t)}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gT} dS \quad \text{dans } V_g \quad (\text{III.149})$$

Selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\Delta \mathbf{b}_{gv} = \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{b}_{gv} dS \quad \text{dans } V_g \quad (\text{III.150})$$

$$\Delta \mathbf{b}_{lv} = \epsilon_l^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \mathbf{n}_{li} \cdot \nabla \mathbf{b}_{lv} dS \quad \text{dans } V_l \quad (\text{III.151})$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv}) = \frac{1}{\epsilon_s V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \mathbf{n}_{si} \cdot (\boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv}) dS \quad \text{dans } V_s \quad (\text{III.152})$$

$$\Delta \mathbf{d}_{gT} = -\frac{1}{\epsilon_g V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gv} dS \quad \text{dans } V_g \quad (\text{III.153})$$

Selon $\frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t}$:

$$\epsilon_g D_v \Delta d_{gsv} = -\frac{1}{V} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla d_{gsv} dS \quad \text{dans } V_g \quad (\text{III.154})$$

III.4.5.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées à ces problèmes de fermeture sont directement déduites des conditions aux limites établies pour les déviations, en remplaçant celles-ci par leurs expressions en fonction des variables de fermeture. À noter que les conditions aux limites au bord du domaine de prise de moyenne ne sont pas définies. Il est coutume

d'utiliser des conditions de périodicité (Whitaker, 1999), mais d'autres conditions peuvent également être utilisées dans certains cas.

❖ *Interface solide-air humide :*

Flux de chaleur selon $\nabla\langle T \rangle$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{gs} \cdot (\lambda_g \nabla \mathbf{b}_{gT}) &= \mathbf{n}_{gs} \cdot \lambda_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} + \mathbf{n}_{gs} \cdot (\lambda_s - \lambda_g \mathbf{I}) \\ &+ \mathbf{n}_{gs} \cdot \left(\frac{\lambda_g \Delta h_{sorp}}{\Delta h^*} \nabla \mathbf{d}_{gT} \right) \quad \text{sur } S_{gs} \end{aligned} \quad (\text{III.155})$$

Continuité de température selon $\nabla\langle T \rangle$:

$$\mathbf{b}_{gT} = \mathbf{b}_{sT} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.156})$$

Sorption selon $\nabla\langle T \rangle$ et $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{sg} \cdot D_v (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{d}_{gv}) \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle + \mathbf{n}_{sg} \cdot D_v \nabla \mathbf{d}_{gsv} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \frac{\lambda_g}{\Delta h^*} \mathbf{n}_{gs} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle \\ = K \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \quad \text{sur } S_{gs} \end{aligned} \quad (\text{III.157})$$

Sorption selon $\nabla\langle T \rangle$:

$$\nabla \mathbf{d}_{gT} \cdot \mathbf{n}_{gs} = 0 \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.158})$$

Sorption selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\nabla \mathbf{d}_{gv} \cdot \mathbf{n}_{gs} = -\mathbf{n}_{gs} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.159})$$

Sorption selon $\frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t}$:

$$\mathbf{n}_{sg} \cdot (D_v \nabla \mathbf{d}_{gsv}) = K \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.160})$$

Continuité de flux de chaleur selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\Delta h^* D_v (\mathbf{n}_{sg} \cdot \nabla \mathbf{b}_{gv}) = \mathbf{n}_{gs} \cdot \frac{\Delta h^* D_v \lambda_s}{\lambda_s^*} \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv} + \Delta h_{sorp} D_v (\mathbf{n}_{gs} \cdot (\nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I})) \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.161})$$

Continuité de température selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\frac{\lambda_s^*}{\lambda_g} \mathbf{b}_{gv} = \mathbf{b}_{sv} \quad \text{sur } S_{gs} \quad (\text{III.162})$$

On remarquera ici une correction par rapport au problème proposé par (Stephen Whitaker, 1998) qui avait omis le terme $\frac{\lambda_s^*}{\lambda_g}$.

❖ *Interface solide-eau :*

Continuité du flux de chaleur selon $\nabla\langle T \rangle$:

$$\mathbf{n}_{sl} \cdot \boldsymbol{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} = \lambda_l \mathbf{n}_{sl} \cdot \nabla \mathbf{b}_{lT} + \mathbf{n}_{sl} \cdot (\lambda_l \mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda}_s) \quad \text{sur } S_{ls} \quad (\text{III.163})$$

Continuité de température selon $\nabla\langle T \rangle$:

$$\mathbf{b}_{sT} = \mathbf{b}_{lT} \quad \text{sur } S_{ls} \quad (\text{III.164})$$

Continuité de flux de chaleur selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\mathbf{n}_{sl} \cdot \frac{\lambda_s}{\lambda_s^*} \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} = \mathbf{n}_{sl} \cdot \nabla \mathbf{b}_{lT} \quad \text{sur } S_{ls} \quad (\text{III.165})$$

Continuité de température selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\frac{\lambda_s^*}{\lambda_l} \mathbf{b}_{lv} = \mathbf{b}_{sv} \quad \text{sur } S_{ls} \quad (\text{III.166})$$

❖ *Interface air humide-eau :*

Continuité du flux de chaleur selon $\nabla\langle T \rangle$:

$$\lambda_l \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla \mathbf{b}_{lT} = \lambda_g \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla \mathbf{b}_{gT} + (\lambda_g - \lambda_l) \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_{lg} + \frac{\Delta h_{cond}}{\Delta h^*} \lambda_g \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gT} \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.167})$$

Continuité du flux de chaleur selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla \mathbf{b}_{lv} = \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla \mathbf{b}_{gv} + \frac{\Delta h_{cond}}{\Delta h^*} \mathbf{n}_{lg} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{d}_{gv}) \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.168})$$

Continuité de la température selon $\nabla\langle T \rangle$:

$$\mathbf{b}_{gT} = \mathbf{b}_{lT} \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.169})$$

Continuité de la température selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_l} \mathbf{b}_{lv} = \mathbf{b}_{gv} \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.170})$$

Equilibre thermique local sur l'interface :

$$\widetilde{\rho}_v = \tilde{T}_g \frac{\partial F}{\partial T_g} \Big|_{T_g=\langle T_g \rangle^g} \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.171})$$

En développant on obtient trois conditions distinctes :

Selon $\nabla\langle T \rangle$:

$$\mathbf{d}_{gT} = \frac{\Delta h_{cond} D_v}{\lambda_g} \mathbf{b}_{gT} \frac{\partial F}{\partial T_g} \Big|_{T_g=\langle T \rangle} \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.172})$$

Selon $\nabla\langle \rho_v \rangle^g$:

$$\mathbf{d}_{gv} = \frac{\Delta h_{cond} D_v}{\lambda_g} \mathbf{b}_{gv} \frac{\partial F}{\partial T_g} \Big|_{T_g=\langle T \rangle} \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.173})$$

Et selon $\frac{\partial\langle \rho_v \rangle^g}{\partial t}$:

$$d_{gsv} \frac{\partial F}{\partial T_g} \Big|_{T_g=\langle T \rangle} = 0 \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.174})$$

En supposant que $\frac{\partial F}{\partial T_g} \Big|_{T_g=\langle T \rangle}$ est constant dans le volume de prise de moyenne (ce terme ne dépendant que de la température moyenne), on peut simplifier la condition précédente :

$$d_{gsv} = 0 \quad \text{sur } S_{gl} \quad (\text{III.175})$$

III.5 EQUATIONS FERMEES A L'ECHELLE DE LA FIBRE

En introduisant les relations de fermeture dans les équations moyennées obtenues dans la section III.3.2, on peut développer les **équations fermées à l'échelle de la fibre**.

III.5.1 Taux de changement de phase

Avant de s'intéresser aux équations de conservation moyennées de la masse et de l'énergie, il convient de développer des expressions adaptées des termes de changement de phase (sorption/désorption, condensation / évaporation) en fonction des variables moyennées.

III.5.1.1 Taux de condensation moyen

On a déjà montré que :

$$\dot{m}_{cond} \simeq D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{lg} \quad \text{sur } S_{lg} \quad (\text{III.176})$$

En intégrant et en introduisant la décomposition de Gray on obtient :

$$\langle \dot{m}_{cond} \rangle = \frac{1}{V} \int_{S_{lg}} D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \quad (III.177)$$

En remplaçant $\tilde{\rho}_v$ par son expression en fonction des variables de fermeture :

$$\langle \dot{m}_{cond} \rangle = \frac{D_v}{V} \int_{S_{lg}} \left(\nabla \langle \rho_v \rangle^g + \nabla \left(\mathbf{d}_{gv} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g + \frac{\lambda_g}{\Delta h^* D_v} \mathbf{d}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle \right) + \nabla d_{gsv} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n}_{lg} dS \quad (III.178)$$

On rappelle que l'on néglige les dérivées du deuxième ordre et supérieur pour $\langle \rho_v \rangle^g$ et $\nabla \langle T \rangle$ au sein du volume de prise de moyenne. En utilisant le fait que $\nabla(\mathbf{d} \cdot \nabla \langle T \rangle) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{d}) \cdot \nabla \langle T \rangle$, on peut mettre l'équation précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \dot{m}_{cond} \rangle = \frac{D_v}{V} \int_{S_{lg}} & \left(\mathbf{n}_{lg} \cdot (\nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I}) \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g + \frac{\lambda_g}{\Delta h^* D_v} \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle + \right. \\ & \left. + \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla d_{gsv} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \right) dS \end{aligned} \quad (III.179)$$

En sortant les termes macroscopiques de l'intégrale, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \langle \dot{m}_{cond} \rangle = & \left(\frac{D_v}{V} \int_{S_{lg}} \mathbf{n}_{lg} \cdot (\nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I}) dS \right) \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \\ & + \left(\frac{\lambda_g}{\Delta h^* V} \int_{S_{lg}} \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gT} dS \right) \cdot \nabla \langle T \rangle + \\ & + \left(\frac{D_v}{V} \int_{S_{lg}} \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla d_{gsv} dS \right) \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \end{aligned} \quad (III.180)$$

Soit sous une forme plus compacte :

$$\langle \dot{m}_{cond} \rangle = \mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \langle T \rangle + m_v^{cond} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \quad (III.181)$$

Les paramètres vectoriels moyens \mathbf{m}_{gv}^{cond} et \mathbf{m}_{gT}^{cond} ainsi que le scalaire m_v^{cond} peuvent être déduits des champs de vecteurs de fermeture. Ils dépendent notamment des fractions volumiques d'air humide et d'eau liquide.

III.5.1.2 Taux d'adsorption moyen

Le taux moyen de sorption est défini par :

$$\langle \dot{m}_{sorp} \rangle = \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{sg} dS = \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} K \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dS \quad (\text{III.182})$$

Ici, on peut choisir de développer l'intégrale du flux de vapeur ou de la dérivée temporelle de la masse volumique de vapeur. Dans le premier cas on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \dot{m}_{sorp} \rangle &= \left(\frac{D_v}{V} \int_{S_{gs}} \mathbf{n}_{sg} \cdot (\nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I}) dS \right) \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \\ &+ \left(\frac{\lambda_g}{\Delta h^*} \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} \mathbf{n}_{sg} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gT} dS \right) \cdot \nabla \langle T \rangle \\ &+ \left(\frac{D_v}{V} \int_{S_{gs}} \mathbf{n}_{lg} \cdot \nabla s_v dS \right) \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{III.183})$$

En rappelant que d'après les conditions aux limites on a $\mathbf{n}_{sg} \cdot (D_v \nabla s_v) = K$ sur S_{gs} , $\mathbf{n}_{sg} \cdot (\nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I}) = 0$ sur S_{gs} et enfin $\mathbf{n}_{sg} \cdot \nabla \mathbf{d}_{gT} = 0$ sur S_{gs} , on peut écrire :

$$\langle \dot{m}_{sorp} \rangle = K \mathcal{A}_{gs} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \quad (\text{III.184})$$

avec $\mathcal{A}_{gs} = \frac{S_{gs}}{V}$ la surface de contact chanvre-air humide.

Si on développe l'intégrale $\frac{1}{V} \int_{S_{gs}} K \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dS$ et en supposant K constant dans le VER, on obtient :

$$\langle \dot{m}_{sorp} \rangle = K \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} dS + \frac{1}{V} \int_{S_{gs}} K \frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial t} dS \quad (\text{III.185})$$

La dérivée temporelle de la déviation est souvent négligée (cf quasi-staticité du problème de fermeture) et on obtient alors la même expression :

$$\langle \dot{m}_{sorp} \rangle = K \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \mathcal{A}_{gs} \quad (\text{III.186})$$

III.5.2 Conservation de la masse

En remplaçant dans les équations macroscopiques on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \langle \dot{m}_l \rangle \left(1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \right) &= \epsilon_g D_v \langle \rho_v \rangle^g \\ + \nabla \cdot \frac{D_v}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \left(\mathbf{d}_{gv} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g + \frac{\lambda_g}{\Delta h^* D_v} \mathbf{d}_{gT} \cdot \nabla \langle T \rangle + d_{gsv} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \right) dS \end{aligned} \quad (\text{III.187})$$

Soit en négligeant les variations des gradients macroscopiques dans le VER :

$$\begin{aligned} \epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \langle \dot{m}_l \rangle \left(1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \right) &= D_v \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{d}_{gv} dS + \mathbf{I} \epsilon_g \right) \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \right) \\ + \frac{\lambda_g}{\Delta h^* D_v} \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{d}_{gT} dS \right) \cdot \nabla \langle T \rangle \right) \\ + \frac{D_v}{V} \nabla \cdot \left(\left(\sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} d_{gsv} dS \right) \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.188})$$

Le dernier terme du membre de droite est négligeable devant $\frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t}$, en effet :

$$\frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} = \mathcal{O} \left(\frac{\langle \rho_v \rangle^g}{t} \right) \quad (\text{III.189})$$

Et

$$\nabla \cdot \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} = \mathcal{O} \left(\frac{\langle \rho_v \rangle^g}{tL} \right) \quad (\text{III.190})$$

Finalement on obtient :

$$\epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \langle \dot{m}_l \rangle \left(1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{D}_v^{eff} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle) \quad (\text{III.191})$$

Avec :

$$\mathbf{D}_v^{eff} = D_v \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{d}_{gv} dS + \mathbf{I} \epsilon_g \right) \quad (\text{III.192})$$

$$\mathbf{D}_T^{eff} = \frac{\lambda_g}{\Delta h^*} \left(\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{d}_{gT} dS \right) \quad (\text{III.193})$$

Un moyen plus commode d'exprimer les tenseurs effectifs est de constater que $\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{d}_{gT} dS = \langle \nabla \mathbf{d}_{gT} \rangle - \nabla \underbrace{\langle \mathbf{d}_{gT} \rangle}_{=0}$. On a donc :

$$\mathbf{D}_v^{eff} = \epsilon_g D_v \langle \nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I} \rangle^g \quad (\text{III.194})$$

$$\mathbf{D}_T^{eff} = \frac{\epsilon_g \lambda_g}{\Delta h^*} \langle \nabla \mathbf{d}_{gT} \rangle^g \quad (\text{III.195})$$

Comme $\langle \rho_v \rangle^g \ll \rho_l$ on a $1 - \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{\rho_l} \simeq 1$ et l'équation (III.191) devient :

$$\epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \langle \dot{m}_l \rangle = \nabla \cdot (\mathbf{D}_v^{eff} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle) \quad (\text{III.196})$$

On remarquera que les coefficients effectifs sont fonction de l'espace puisqu'ils dépendent de la microgéométrie au travers des variables de fermeture, mais aussi de la fraction d'eau. De même la porosité peut varier au sein d'une même fibre ou d'une fibre à l'autre.

Il est par ailleurs délicat d'estimer l'importance relative des différents termes. On a priori $\mathbf{D}_v^{eff} > \mathbf{D}_T^{eff}$. Les problèmes de fermetures étant en effet très similaires, et vu les conditions aux limites, on peut a priori dire que $D_v \langle \nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I} \rangle^g > \left| \frac{\lambda_g}{\Delta h^*} \langle \nabla \mathbf{d}_{gT} \rangle^g \right|$ (note : Δh^* est au moins égal à la chaleur latente de condensation). Il est par contre plus difficile d'estimer l'importance de $\langle \dot{m}_{cond} \rangle$ et $\langle \dot{m}_{sorp} \rangle$, qui sont fortement liés à la microgéométrie (et notamment la surface de eau-air et solide-air).

Le terme le plus important du taux de condensation est :

$$\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g = \left(\frac{D_v}{V} \int_{S_{lg}} \mathbf{n}_{lg} \cdot (\nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I}) dS \right) \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \quad (\text{III.197})$$

On peut écrire les ordres de grandeur suivants :

$$\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g = \mathcal{O} \left(\left\| \mathbf{m}_{gv}^{cond} \right\| \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{L} \right) \quad (\text{III.198})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_v^{eff} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g) = \mathcal{O} \left(\left\| \mathbf{D}_v^{eff} \right\| \frac{\langle \rho_v \rangle^g}{L^2} \right)$$

Le terme de condensation est donc négligeable si :

$$\frac{\|\mathbf{D}_v^{eff}\|}{L} \gg \|\mathbf{m}_{gv}^{cond}\| \quad (\text{III.199})$$

Où encore :

$$\frac{1}{L} \int_{V_g} (\nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I}) dV \gg \int_{S_{lg}} \mathbf{n}_{lg} \cdot (\nabla \mathbf{d}_{gv} + \mathbf{I}) dS \quad (\text{III.200})$$

Même si on peut imaginer que l'intégrale de surface est très petite devant l'intégrale volumique, il est difficile de conclure sans connaître les champs de fermeture.

Le terme d'adsorption est quant à lui négligeable si :

$$K\mathcal{A}_{gs} \ll 1 \quad (\text{III.201})$$

III.5.3 Conservation de l'énergie

En introduisant les expressions des déviations on obtient :

$$\begin{aligned} & \langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle \dot{m}_{cond} \Delta h_{cond} \rangle + \langle \dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp} \rangle \\ &= \nabla \cdot [(\epsilon_g \lambda_g \mathbf{I} + \epsilon_l \lambda_l \mathbf{I} + \epsilon_s \langle \lambda_s \rangle^s) \cdot \nabla \langle T \rangle + \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle] + \\ & \nabla \cdot \left(\left[\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{1}{V} \left(\sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \mathbf{n}_{si} \otimes \mathbf{b}_{sT} dS \right) \right] \cdot \nabla \langle T \rangle \right) + \\ & \nabla \cdot \left(\left(\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_s^*} \frac{1}{V} \sum_{i=l,g} \int_{S_{si}} \mathbf{n}_{si} \otimes \mathbf{b}_{sv} dS \right) \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \right) \\ & \quad + \nabla \cdot \left(\left(\frac{\lambda_g}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{b}_{gT} dS \right) \cdot \nabla \langle T \rangle \right) + \\ & \nabla \cdot \left(\left(\frac{\Delta h^* D_v}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{b}_{gv} dS \right) \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \right) + \\ & \nabla \cdot \left(\left(\frac{\lambda_l}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \mathbf{n}_{li} \otimes \mathbf{b}_{lT} dS \right) \cdot \nabla \langle T \rangle \right) + \\ & \nabla \cdot \left(\left(\frac{\Delta h^* D_v}{V} \sum_{i=s,g} \int_{S_{li}} \mathbf{n}_{li} \otimes \mathbf{b}_{lv} dS \right) \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \right) \end{aligned} \quad (\text{III.202})$$

Le terme $\langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle$ peut être développé comme suit :

$$\langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \tilde{T}_s \rangle = \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle + \frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_s^*} \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv} \rangle \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \quad (\text{III.203})$$

A noter que ce terme est souvent négligé, mais qu'il ne soulève pas de problème numérique particulier.

En utilisant la relation $\frac{1}{V} \int_{\partial \Omega_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{b} dS = \langle \nabla \mathbf{b} \rangle - \nabla \underbrace{\langle \mathbf{b} \rangle}_{=0}$ on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} & \langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle \dot{m}_{cond} \Delta h_{cond} \rangle + \langle \dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp} \rangle \\ &= \nabla \cdot [(\epsilon_g \lambda_g \mathbf{I} + \epsilon_l \lambda_l \mathbf{I} + \epsilon_s \langle \lambda_s \rangle^s) \cdot \nabla \langle T \rangle] + \\ & \nabla \cdot (\langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle) + \nabla \cdot \left(\frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_s^*} \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv} \rangle \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \right) + \\ & \nabla \cdot ([\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \langle \nabla \mathbf{b}_{sT} \rangle] \cdot \nabla \langle T \rangle) + \nabla \cdot \left(\langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_s^*} \langle \nabla \mathbf{b}_{sv} \rangle \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g \right) + \\ & \nabla \cdot (\lambda_g \langle \nabla \mathbf{b}_{gT} \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle) + \nabla \cdot (\Delta h^* D_v \langle \nabla \mathbf{b}_{gv} \rangle \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g) + \nabla \cdot (\lambda_l \langle \nabla \mathbf{b}_{lT} \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle) + \\ & \nabla \cdot (\Delta h^* D_v \langle \nabla \mathbf{b}_{lv} \rangle \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g) \end{aligned} \quad (\text{III.204})$$

Avec :

$$\frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_s^*} \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv} \rangle + \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_s^*} \langle \nabla \mathbf{b}_{sv} \rangle = \frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_s^*} \langle (\langle \lambda_s \rangle^s + \tilde{\lambda}_s) \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv} \rangle \quad (\text{III.205})$$

Pour simplifier l'écriture, on note :

$$\lambda_{sT}^{eff} = \epsilon_s \langle \lambda_s \rangle^s + \langle \lambda_s \rangle^s \cdot \langle \nabla \mathbf{b}_{sT} \rangle + \langle \tilde{\lambda}_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} \rangle \quad (\text{III.206})$$

Soit :

$$\lambda_{sT}^{eff} = \epsilon_s \langle \langle \lambda_s \rangle^s + \lambda_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} \rangle^s \quad (\text{III.207})$$

On définit ensuite :

$$\lambda_{gT}^{eff} = \epsilon_g \lambda_g \langle \mathbf{I} + \nabla \mathbf{b}_{gT} \rangle^g \quad (\text{III.208})$$

Et :

$$\lambda_{lT}^{eff} = \epsilon_l \lambda_l \langle \mathbf{I} + \nabla \mathbf{b}_{lT} \rangle^l \quad (\text{III.209})$$

Finalement, le tenseur effectif est la somme de ces trois contributions :

$$\lambda_T^{eff} = \lambda_{sT}^{eff} + \lambda_{gT}^{eff} + \lambda_{lT}^{eff} \quad (\text{III.210})$$

On procède de même pour les termes qui dépendent de $\nabla \langle \rho_v \rangle^g$:

$$\lambda_{sv}^{eff} = \epsilon_s \frac{\Delta h^* D_v}{\lambda_s^*} \langle \lambda_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sv} \rangle^s \quad (\text{III.211})$$

$$\lambda_{gv}^{eff} = \epsilon_g \Delta h^* D_v \langle \nabla \mathbf{b}_{gv} \rangle^g \quad (\text{III.212})$$

$$\lambda_{lv}^{eff} = \epsilon_l \Delta h^* D_v \langle \nabla \mathbf{b}_{lv} \rangle^l \quad (\text{III.213})$$

Et le tenseur effectif :

$$\lambda_v^{eff} = \lambda_{sv}^{eff} + \lambda_{gv}^{eff} + \lambda_{lv}^{eff} \quad (\text{III.214})$$

L'équation peut alors se mettre sous la forme compacte :

$$\langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle \Delta h_{cond} \dot{m}_{cond} \rangle + \langle \Delta h_{sorp} \dot{m}_{sorp} \rangle = \nabla \cdot (\lambda_T^{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle + \lambda_v^{eff} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g) \quad (\text{III.215})$$

On notera que même si on considère $\langle \lambda_s \rangle^s$ comme constant au sein du VER pour le développement des équations, la conductivité moyenne dépend de la position dans la fibre, ce qui implique que les conductivités effectives λ_{sv}^{eff} et λ_{sT}^{eff} varient également en fonction de la position.

De la même manière la porosité des fibres ainsi que la fraction volumique d'eau peut dépendre de la position, l'ensemble des paramètres effectifs sont donc des fonctions de l'espace et de la teneur en eau.

Enfin, comme précédemment on peut vérifier sur la base des problèmes de fermeture que λ_T^{eff} est bien supérieur à λ_{sT}^{eff} . Les autres termes sont quant à eux très difficiles à estimer, car ils dépendent de la teneur en eau et de la microgéométrie et seule une étude numérique ou analytique des problèmes de fermeture permettra de conclure sur les conditions pour lesquelles on peut simplifier cette équation.

À l'issue de ce premier changement d'échelle, nous avons développé des équations homogénéisées gouvernant le transfert de masse et de chaleur au sein des fibres. Les problèmes de fermeture couplés ont été écrits et pourront permettre de calculer les paramètres effectifs en fonction de la géométrie et de la teneur en eau des fibres. Enfin,

nous avons également proposé une formulation pour les taux de sorption et de changement de phase.

III.6 EQUATIONS A L'ECHELLE DU RESEAU DE FIBRES

Maintenant que nous disposons d'équations décrivant les transferts hygrothermiques dans les fibres, nous pouvons envisager le second changement d'échelle. L'objectif est ici d'écrire les équations à l'échelle macroscopique (i.e. du produit) en homogénéisant les équations de transferts à l'échelle du réseau de fibres. À cette échelle, on distingue trois phases : les fibres polymères qui sont des matériaux que l'on supposera homogènes et indéformables, les fibres de chanvre dont les équations homogénéisées ont été développées auparavant et l'air humide. On suppose ici que l'eau liquide se trouve uniquement à l'intérieur des fibres de chanvre (on rappelle que la teneur en eau des fibres est supposée être au maximum de l'ordre de la teneur en eau de saturation). On détaille par la suite les équations de conservation dans chacune des phases.

III.6.1 Conservation de l'énergie

Afin de simplifier l'écriture et de différencier les quantités définies à l'intérieur des fibres de chanvre de celle définie dans l'air humide, on adopte les notations suivantes : la fraction d'air humide dans les fibres auparavant notée ϵ_g devient ϵ_{gc} , fraction volumique du gaz dans la fibre de chanvre homogénéisée. De même on ajoutera l'indice c aux variables et paramètres définis dans les fibres homogénéisées. Les grandeurs moyennes comme $\langle T \rangle$ et $\langle \rho_v \rangle^g$ sont maintenant des variables locales à l'échelle du réseau et sont notées respectivement T_c et ρ_{vc} . De la même manière $\langle \rho C_p \rangle$ sera noté $\langle \rho C_p \rangle_c$.

Chanvre (c)

$$\langle \rho C_p \rangle_c \frac{\partial \langle T \rangle_c}{\partial t} + \langle \Delta h_{cond} \dot{m}_{cond} \rangle + \langle \Delta h_{sorp} \dot{m}_{sorp} \rangle = \nabla \cdot (\lambda_{ct}^{eff} \cdot \nabla T_c + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc}) \quad (III.216)$$

Fibres polymères (p)

$$\rho(C_p)_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = \lambda_p \Delta T_p \quad (III.217)$$

Air humide (g)

Afin d'écrire la conservation de l'énergie dans le gaz, il est nécessaire d'estimer l'importance du transfert radiatif ainsi que de la convection passive. Pour cela, on se place dans les conditions réelles d'utilisation de nos matériaux destinés à l'isolation de bâtiment.

L'importance de la convection passive par rapport à la conduction dans un milieu poreux peut être estimée par le calcul du nombre de Rayleigh (Ra). Si ce dernier est inférieur à 40 (Lux, 2005), alors les transferts convectifs passifs peuvent être négligés devant les phénomènes de conduction.

On définit le nombre de Rayleigh pour un milieu poreux par :

$$Ra = \frac{g\beta\rho_{air}^2 C_p}{\mu_{air}} \frac{K}{\lambda} \Delta T L \quad (III.218)$$

où g est le coefficient de pesanteur ($9,81 \text{ m.s}^{-2}$), β est le coefficient de dilatation thermique de l'air ($3,67 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$), ρ_{air} est la masse volumique de l'air (1 kg.m^{-3}), ΔT est la différence de température entre les deux faces du matériau, L est la dimension caractéristique du matériau, ici son épaisseur qui est fixée à $0,12 \text{ m}$, μ_{air} est la viscosité dynamique de l'air ($18,4 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$), C_p est la chaleur spécifique de l'air ($1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$), et λ est la conductivité thermique estimée du matériau, que l'on déterminera plus tard (IV.6.1.3) est qui vaut en moyenne $0,041 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. L'ordre de grandeur de la perméabilité est estimé à environ $5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ par des modèles ainsi que par le calcul numérique (cf partie IV.7.2).

Pour une différence de température $\Delta T = 25 \text{ K}$ qui favorise l'apparition du transfert convectif et pour un rayon de fibres de $50 \text{ }\mu\text{m}$ (la moyenne mesurée sur les images tomographiques), le nombre de Rayleigh vaut environ $0,66$. Dans ce cas-là, le phénomène de convection peut être négligé devant celui de conduction.

En ce qui concerne le transfert radiatif, les matériaux sont soumis à des températures d'utilisation de l'ordre de 300 K . Les écarts de températures entre l'intérieur du bâtiment et le milieu extérieur peuvent atteindre au maximum quelques dizaines de degrés selon la situation géographique et la saison. Dans ces conditions, on peut dire que le transfert par rayonnement ne jouera a priori pas un rôle important.

Pour estimer l'importance relative de ces deux modes de transfert (conduction et rayonnement), on peut calculer le nombre de Planck N qui représente le rapport entre le flux thermique par conduction et le flux par rayonnement :

$$N = \frac{\lambda}{4n^2\sigma T^3 l_p} \quad (III.219)$$

où λ est la conductivité thermique par conduction ($0,041 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$), l_p est le libre parcours moyen des photons (distance moyenne entre une émission et une absorption), n est l'indice de réfraction du milieu ($n \sim 1$ pour l'air) et σ est la constante de Stephan-Boltzmann ($5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$).

Lorsque $N \gg 1$ (en pratique $N > 10$ suffit), alors le transfert peut être considéré comme purement conductif et à l'inverse, si $N \rightarrow 0$ (en pratique $N < 0,1$ suffit), le transfert se fait par rayonnement. Si $0,1 < N < 10$, alors c'est l'épaisseur optique $\tau_0 = L/l_p$, où L est l'épaisseur du matériau, qui permet d'adopter une modélisation adaptée du couplage.

Si on considère que le libre parcours moyen correspond à la distance moyenne entre les fibres ($420 \text{ }\mu\text{m}$ la moyenne déjà trouvée dans (II.4.2)) et que la température est de l'ordre de (300 K) alors on trouve $N=15,9$ et $\tau_0=7,52 \cdot 10^{-3}$. Pour cette épaisseur optique on peut considérer le matériau optiquement épais et par suite il sera éventuellement possible d'avoir recours à l'approximation de Rosseland pour calculer le flux radiatif si besoin.

Dans le cas de l'application considérée, le nombre de Planck vaut environ 16, ce qui nous permet de considérer que le rayonnement est négligeable devant le transfert par conduction.

Concernant la convection forcée, nous ne pouvons pas la négliger du fait de la forte porosité et des grandes dimensions des pores d'une part, mais également, car ce terme dépend des conditions d'utilisation au travers de la différence de pression totale d'air humide entre les deux faces de l'isolant. On précisera par la suite les conditions pour lesquelles le transfert d'humidité peut être considéré comme purement diffusif. On négligera par ailleurs la contribution du terme $\nabla \cdot (\sum_i \rho_i \mathbf{u}_i h_i)$ où $i = v, as$ et \mathbf{u}_i est la vitesse de diffusion de l'espèce i (cf Whitaker, 1998). On a alors :

$$\rho_g (C_p)_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\rho_g (C_p)_g \mathbf{v}_g T_g) = \nabla \cdot (\lambda_g \nabla T_g) \quad (\text{III.220})$$

III.6.2 Conservation de la masse

Air humide

Conservation de la masse totale de l'air humide :

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}_g) = 0 \quad (\text{III.221})$$

Conservation de la masse de la vapeur (v) :

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{v}_g) = \nabla \cdot \left(\rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \right) \quad (\text{III.222})$$

Chanvre

$$\epsilon_{gc} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle_c^g}{\partial t} + \langle \dot{m}_{cond} \rangle = \nabla \cdot (\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle_c^g) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_{ct}^{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle_c) \quad (\text{III.223})$$

III.6.3 Conditions aux limites

❖ Interface chanvre / polymère

Dans le cas d'une interface entre un milieu hétérogène homogénéisé (fibre de chanvre) et homogène (air humide ou polymère), les conditions aux limites doivent être étudiées attentivement, car les variables moyennes du milieu homogénéisées ne sont rigoureusement définies que loin des bords. Selon (Ochoa-Tapia and Whitaker, 1997) les conditions de continuité du flux de chaleur et de la température sont valides pour un modèle à équilibre thermique local. Un travail plus récent (d'Hueppe et al., 2011) montre par ailleurs que lorsque l'on peut déterminer la position d'une interface virtuelle entre un milieu poreux homogénéisé et un milieu homogène pour laquelle la condition de continuité du flux est valide. Cette approche est plus simple que d'utiliser des conditions de sauts qui sont souvent très complexes à déterminer. Dans ce travail, on utilisera donc les conditions de continuité pour les différents flux.

Continuité de la température :

$$T_c = T_p \quad (\text{III.224})$$

Conservation du flux de chaleur :

$$\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c \cdot \mathbf{n}_{cp} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} \cdot \mathbf{n}_{cp} = \lambda_p \nabla T_p \cdot \mathbf{n}_{cp} \quad (\text{III.225})$$

Mais comme le polymère est imperméable à la vapeur on a :

$$\nabla \rho_{vc} \cdot \mathbf{n}_{cp} \simeq 0 \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.226})$$

Et l'équation précédente devient alors :

$$\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c \cdot \mathbf{n}_{cp} = \lambda_p \nabla T_p \cdot \mathbf{n}_{cp} \quad (\text{III.227})$$

❖ *Interface chanvre / air humide*

Continuité de la température :

$$T_c = T_g \quad (\text{III.228})$$

Conservation du flux de chaleur :

$$\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c \cdot \mathbf{n}_{cg} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} \cdot \mathbf{n}_{cg} = \lambda_g \nabla T_g \cdot \mathbf{n}_{cg} - \rho_g (C_p)_g \mathbf{v}_g T_g \cdot \mathbf{n}_{cg} \quad (\text{III.229})$$

Le flux d'air humide est supposé nul à la surface des fibres de chanvre :

$$\rho_g \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}_{cg} = 0 \quad (\text{III.230})$$

On a donc :

$$\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c \cdot \mathbf{n}_{cg} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} \cdot \mathbf{n}_{cg} = \lambda_g \nabla T_g \cdot \mathbf{n}_{cg} \quad (\text{III.231})$$

Les fibres de chanvre laissent passer la vapeur :

$$\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} \cdot \mathbf{n}_{cg} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c \cdot \mathbf{n}_{cg} = \rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \cdot \mathbf{n}_{cg} = -\rho_g D_{as} \nabla \left(\frac{\rho_{as}}{\rho_g} \right) \cdot \mathbf{n}_{cg} \quad (\text{III.232})$$

❖ *Interface air humide / polymère*

Continuité de la température :

$$T_g = T_p \quad (\text{III.233})$$

Conservation du flux de chaleur :

$$\lambda_g \nabla T_g \cdot \mathbf{n}_{pg} = \lambda_p \nabla T_p \cdot \mathbf{n}_{pg} \quad (\text{III.234})$$

Conditions d'imperméabilité :

$$\rho_g \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}_{pg} = 0 \quad (\text{III.235})$$

$$\rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \cdot \mathbf{n}_{pg} = 0 \quad (\text{III.236})$$

III.7 EQUATIONS MACROSCOPIQUES (ECHELLE DU MATERIAU)

Afin de bien différencier les deux changements d'échelles, on définit l'opérateur moyenne à cette échelle par $\{\}$.

III.7.1 Conservation de l'énergie

III.7.1.1 Chanvre

L'application de l'opérateur moyenne sur l'équation (III.216) permet dans ce cas d'écrire l'équation moyenne de conservation de l'énergie dans le chanvre :

$$\begin{aligned} & \left\{ \langle \rho C_p \rangle_c \frac{\partial T_c}{\partial t} \right\} + \{ \langle \dot{m}_{cond} \rangle \Delta h_{cond} \} + \{ \langle \dot{m}_{sorp} \rangle \Delta h_{sorp} \} \\ &= \nabla \cdot (\{ \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c \} + \{ \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} \}) \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc}) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \end{aligned} \quad (\text{III.237})$$

En procédant comme dans la section 2.1.1, on a :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{ \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c \} &= \nabla \cdot \left(\langle \lambda_{cT}^{eff} \rangle^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{ T_c \}^c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\ &+ \nabla \cdot \langle \tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.238})$$

Si on développe le premier terme du membre de gauche on peut écrire :

$$\left\{ \langle \rho C_p \rangle_c \frac{\partial T_c}{\partial t} \right\} = \left\{ \{ \langle \rho C_p \rangle_c \}^c \frac{\partial T_c}{\partial t} \right\} + \left\{ \langle \widetilde{\rho C_p} \rangle_c \left(\frac{\partial \{ T_c \}^c}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}_c}{\partial t} \right) \right\} \quad (\text{III.239})$$

Comme on néglige les variations des termes moyens dans le VER, et que la moyenne des déviations est nulle, on a alors :

$$\left\{ \langle \rho C_p \rangle_c \frac{\partial T_c}{\partial t} \right\} = \left\{ \langle \rho C_p \rangle_c \right\}^c \left\{ \frac{\partial T_c}{\partial t} \right\} + \left\{ \langle \widetilde{\rho C_p} \rangle_c \frac{\partial \widetilde{T}_c}{\partial t} \right\} \quad (\text{III.240})$$

En supposant que le produit des moyennes est très grand devant la moyenne du produit des déviations on obtient finalement :

$$\begin{aligned} & \left\{ \langle \rho C_p \rangle_c \right\}^c \frac{\partial \{T_c\}}{\partial t} + \{ \langle \dot{m}_{cond} \Delta h_{cond} \rangle \} + \{ \langle \dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp} \rangle \} \\ &= \nabla \cdot \left(\left\{ \lambda_{cT}^{eff} \right\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{T_c\}^c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{T}_c \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\ &+ \nabla \cdot \{ \widetilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c \} + \nabla \cdot \left(\left\{ \lambda_{cv}^{eff} \right\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{ \rho_{vc} \}^c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{\rho}_{vc} \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\ &+ \nabla \cdot \{ \widetilde{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc} \} + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc}) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \end{aligned} \quad (\text{III.241})$$

III.7.1.2 Air humide

On procède de la même manière que dans (Stephen Whitaker, 1998) pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \epsilon_g \{ \rho_g \}^g (C_p)_g \frac{\partial \{T_g\}^g}{\partial t} + \{ \rho_g \}^g (C_p)_g \{ \mathbf{v}_g \} \{T_g\}^g \\ &= \nabla \cdot \left(\lambda_g \epsilon_g \nabla \{T_g\}^g + \frac{\lambda_g}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} T_g dS \right) \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \lambda_g \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla T_g dS - \nabla \left(\{ \rho_g \}^g (C_p)_g \{ \widetilde{\mathbf{v}}_g \widetilde{T}_g \} \right) \\ &- (C_p)_g \{ \widetilde{\rho}_g \widetilde{\mathbf{v}}_g \} \cdot \nabla \{T_g\}^g \end{aligned} \quad (\text{III.242})$$

III.7.1.3 Fibre polymère

Contrairement aux fibres de chanvre, la conductivité des fibres est constante et isotrope au sein des fibres polymère. On a donc :

$$\rho_p(C_p) \frac{\partial \{T_p\}}{\partial t} = \lambda_p \Delta \{T_p\} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=g,c} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} T_p dS \right) + \frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{gi}} \nabla T_p \cdot \mathbf{n}_{pi} dS \quad (\text{III.243})$$

En rappelant la relation $\frac{1}{V} \int_S \langle \psi_i \rangle \mathbf{n}_i dS \simeq -\nabla \epsilon_i \langle \psi_i \rangle^i$, on a finalement :

$$\rho_p(C_p) \frac{\partial \{T_p\}}{\partial t} = \lambda_p \Delta \{T_p\} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=g,c} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} \widetilde{T}_p dS \right) + \frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{gi}} \nabla T_p \cdot \mathbf{n}_{pi} dS \quad (\text{III.244})$$

III.7.1.4 Equilibre thermique local

De la même manière que dans le précédent changement d'échelle on supposera l'équilibre thermique local (ETL). Le faible contraste de conductivité thermique entre les phases ainsi que les temps caractéristiques de variations dans le cas d'un isolant destiné à l'isolation du bâtiment permettent d'appuyer cette hypothèse. Dans ce cadre on écrit $\{T_g\}^g = \{T_c\}^c = \{T_p\}^p = \{T\}$. On peut donc sommer les trois équations de conservation de l'énergie développées dans chacune des phases :

$$\begin{aligned}
 & \left(\epsilon_g \{\rho_g\}^g (C_p)_g + \epsilon_c \{\langle \rho C_p \rangle_c\}^c + \epsilon_p \rho_p (C_p)_p \right) \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \{\rho_g\}^g (C_p)_g \{\mathbf{v}_g\} \{T\} \\
 & + \{\langle \dot{m}_{cond} \Delta h_{cond} \rangle\} + \{\langle \dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp} \rangle\} \\
 = & \nabla \cdot \left[\left(\lambda_g \epsilon_g \mathbf{I} + \lambda_p \epsilon_p \mathbf{I} + \{\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}\}^c \epsilon_c \right) \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_g}{V} \sum_{i=p,c} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{gi} \tilde{T}_g dS + \{\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}\}^c \right. \\
 & \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) + \{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c\} + \frac{\lambda_p}{V} \sum_{i=g,c} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} \tilde{T}_p dS \left. \right] \\
 & + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \lambda_g \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla T_g dS + \frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{pi}} \lambda_p \mathbf{n}_{pi} \cdot \nabla T_p dS \\
 & + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c + \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc}) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \\
 & - \nabla \left(\{\rho_g\}^g (C_p)_g \{\tilde{\mathbf{v}}_g \tilde{T}_g\} \right) - (C_p)_g \{\tilde{\rho}_g \tilde{\mathbf{v}}_g\} \cdot \nabla \{T_g\}^g \\
 & + \nabla \cdot \left(\{\boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{\rho_v\} + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{\rho}_{vc} \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) + \{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc}\} \right)
 \end{aligned} \tag{III.245}$$

Les conditions de continuité de flux de chaleur aux interfaces indiquent que la somme des trois surfaciques contenant le flux thermique s'annule :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \lambda_g \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla T_g dS + \frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{pi}} \lambda_p \mathbf{n}_{pi} \cdot \nabla T_p dS \\
 & + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c + \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc}) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS = 0
 \end{aligned} \tag{III.246}$$

En posant :

$$\left(\epsilon_g \{\rho_g\}^g (C_p)_g + \epsilon_c \{\langle \rho C_p \rangle_c\}^c + \epsilon_p \rho_p (C_p)_p \right) = \{\rho C_p\} \tag{III.247}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 & \{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \{\rho_g\}^g (C_p)_g \{\mathbf{v}_g\} \{T\} + \{\dot{m}_{cond} \Delta h_{cond}\} + \{\dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp}\} = \\
 & \nabla \cdot \left[\left(\lambda_g \epsilon_g \mathbf{I} + \lambda_p \epsilon_p \mathbf{I} + \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \epsilon_c \right) \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_g}{V} \sum_{i=p,c} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \tilde{T}_g dS + \right. \\
 & \quad \left. \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) + \langle \tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c \rangle \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\lambda_p}{V} \sum_{i=g,c} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} \tilde{T}_p dS \right] - \nabla \cdot \left(\{\rho_g\}^g (C_p)_g \{\tilde{\mathbf{v}}_g \tilde{T}_g\} \right) - (C_p)_g \{\tilde{\rho}_g \tilde{\mathbf{v}}_g\} \cdot \nabla \{T\} + \\
 & \quad \nabla \cdot \left(\{\lambda_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{\rho_{vc}\}^c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{\rho}_{vc} \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) + \{\tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc}\} \right)
 \end{aligned} \tag{III.248}$$

Même s'il est important de conserver le terme d'advection dans le problème de transport de vapeur, il convient dans le cas du transfert de chaleur de se poser la question de l'importance de la convection, puisque les vitesses mises en jeu dans ces milieux sont assez faibles. La différence de pression entre les deux faces de l'isolant est en effet très faible dans le cas d'un bâtiment (d'autant plus si l'isolant est à l'intérieur).

En prenant une valeur de $\Delta P_g = 10$ Pa et une longueur caractéristique de $420 \mu\text{m}$ (la moyenne de taille des pores dans nos images), et avec une vitesse d'environ $\{\mathbf{v}_g\} \simeq 4,5 \cdot 10^{-3} \text{m.s}^{-1}$ (la vitesse de Darcy). Le Peclet de chaleur vaut alors environ 0,069. La conduction est donc dans ce cas le phénomène prépondérant.

Dans le cas d'un problème thermique purement conductif, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 & \{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \{\langle \dot{m}_{cond} \Delta h_{cond} \rangle\} + \{\langle \dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp} \rangle\} = \\
 & \nabla \cdot \left[\left(\lambda_g \epsilon_g \mathbf{I} + \lambda_p \epsilon_p \mathbf{I} + \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \epsilon_c \right) \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_g}{V} \sum_{i=p,c} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \tilde{T}_g dS \right. \\
 & \left. + \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) + \{\tilde{\lambda}_{cT}^{eff}\} \cdot \nabla \tilde{T}_c \right] + \frac{\lambda_p}{V} \sum_{i=g,c} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} \tilde{T}_p dS \\
 & \left. + \{\lambda_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{\rho_{vc}\}^c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{\rho}_{vc} \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) + \{\tilde{\lambda}_{cT}^{eff}\} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} \right] \quad (III.249)
 \end{aligned}$$

On retrouve ici une équation de conservation macroscopique similaire à celle obtenue lors du premier changement d'échelle, avec la présence d'un couplage avec le transfert de vapeur au travers des gradients de masse volumique de vapeur. Comme précédemment, cette équation nécessite le développement des problèmes gouvernant les déviations afin de pouvoir la fermer.

III.7.2 Conservation de la masse

III.7.2.1 Chanvre

L'application de l'opérateur moyenne sur l'équation (III.223) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 & \{\epsilon_{gc}\}^c \epsilon_c \frac{\partial \{\rho_{vc}\}^c}{\partial t} + \epsilon_c \{\langle \dot{m}_l \rangle\}^c \\
 & = \nabla \cdot \left(\{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{\rho_{vc}\}^c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{\rho}_{vc} \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\
 & + \nabla \cdot \left\{ \widetilde{\mathbf{D}_{cv}^{eff}} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} \right\} + \nabla \cdot \left(\{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{T_c\}^c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\
 & + \nabla \cdot \left\{ \widetilde{\mathbf{D}_{cT}^{eff}} \cdot \nabla \tilde{T}_c \right\} + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \quad (III.250)
 \end{aligned}$$

On note que l'on a négligé les déviations du terme ϵ_{gc} , en supposant que la fraction volumique d'air humide au sein des fibres variait peu dans le volume de prise de moyenne.

On a donc pu écrire :

$$\left\{ \epsilon_{gc} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle_c^g}{\partial t} \right\} = \{ \epsilon_{gc} \}^c \frac{\partial \{ \rho_{vc} \}}{\partial t} = \{ \epsilon_{gc} \}^c \epsilon_c \frac{\partial \{ \rho_{vc} \}^c}{\partial t} \quad (\text{III.251})$$

III.7.2.2 Air humide

En suivant le développement proposé par (Whitaker, 1998) afin d'écrire les équations de conservation dans l'air humide, on obtient pour la conservation de la masse de vapeur :

$$\begin{aligned} \epsilon_g \frac{\partial \{ \rho_v \}^g}{\partial t} + \nabla \cdot (\{ \rho_v \}^g \{ \mathbf{v}_g \}) \\ = \nabla \cdot \left(\{ \rho_g \}^g D_v \left(\epsilon_g \nabla \frac{\{ \rho_v \}^g}{\{ \rho_g \}^g} + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \frac{\tilde{\rho}_v}{\{ \rho_g \}^g} dS \right) \right) \\ - \nabla \cdot \left(\{ \rho_v \}^g D_v \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \frac{\tilde{\rho}_g}{\{ \rho_g \}^g} dS \right) - \nabla \cdot \{ \tilde{\rho}_v \tilde{\mathbf{v}}_g \} \\ + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \mathbf{n}_{gi} dS \end{aligned} \quad (\text{III.252})$$

Développons les deuxième et troisième termes en sortant les termes moyens de l'intégrale surfacique :

$$\{ \rho_g \}^g D_v \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \frac{\tilde{\rho}_v}{\{ \rho_g \}^g} dS = D_v \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \tilde{\rho}_v \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.253})$$

$$\{ \rho_v \}^g D_v \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \frac{\tilde{\rho}_g}{\{ \rho_g \}^g} dS = \frac{\{ \rho_v \}^g}{\{ \rho_g \}^g} D_v \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \tilde{\rho}_g \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.254})$$

Dans l'application visée, on a toujours :

$$\{ \rho_v \}^g \ll \{ \rho_g \}^g \quad (\text{III.255})$$

Et on peut donc négliger le terme (III.253) devant (III.254). On suppose également que $\{ \tilde{\rho}_v \tilde{\mathbf{v}}_g \} \ll \{ \rho_v \}^g \{ \mathbf{v}_g \}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_g \frac{\partial \{\rho_v\}^g}{\partial t} + \nabla \cdot (\{\rho_v\}^g \{\mathbf{v}_g\}) \\
 = \nabla \cdot \left(\{\rho_g\}^g D_v \left(\epsilon_g \nabla \frac{\{\rho_v\}^g}{\{\rho_g\}^g} + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \frac{\tilde{\rho}_v}{\{\rho_g\}^g} dS \right) \right) \\
 + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \mathbf{n}_{gi} dS
 \end{aligned} \tag{III.256}$$

Dans le cas où le gaz peut être considéré comme incompressible, on obtient une équation largement simplifiée :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_g \frac{\partial \{\rho_v\}^g}{\partial t} + \{\mathbf{v}_g\} \nabla \cdot \{\rho_v\}^g \\
 = \nabla \cdot \left(D_v \left(\epsilon_g \nabla \{\rho_v\}^g + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \tilde{\rho}_v dS \right) \right) \\
 + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \rho_v \mathbf{n}_{gi} dS
 \end{aligned} \tag{III.257}$$

Pour la conservation de la masse totale de gaz, on obtient :

$$\epsilon_g \frac{\partial \{\rho_g\}^g}{\partial t} + \nabla \cdot (\{\rho_v\}^g \{\mathbf{v}_g\}) = 0 \tag{III.258}$$

On note que cette équation se présente déjà sous une forme fermée.

Le champ de vitesses microscopiques \mathbf{v}_g ainsi que sa moyenne $\{\mathbf{v}_g\}$ dans le volume de prise de moyenne peuvent être accessibles par la simulation numérique sur la microstructure réelle.

III.7.2.3 Equilibre massique local

Dans le cas où les pressions partielles de vapeur diffèrent peu dans l'air humide et à l'intérieur des fibres de chanvre, on peut poser que $\{\langle \rho_v \rangle_c^g\}^c = \{\rho_v\}^g = \{\rho_v\}$. Dans le cas contraire, il est nécessaire de développer un modèle non-équilibre local.

On se limite dans un premier temps au cas où l'équilibre massique local est valide, toujours en s'appuyant sur les spécificités liées à la fonction de notre matériau comme isolant dans le bâtiment.

On peut alors sommer les deux équations de conservation dans le chanvre et dans l'air humide :

$$\begin{aligned}
 & (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c \epsilon_c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\dot{m}_l\} + \nabla \cdot (\{\rho_v\} \{\mathbf{v}_g\}) \\
 & = \nabla \cdot \left(\{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{\rho_v\} + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{\rho}_{vc} \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\
 & + \nabla \cdot \{\widetilde{\mathbf{D}_{cv}^{eff}} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc}\} + \nabla \cdot \left(\{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{T_c\}^c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\
 & + \nabla \cdot \{\widetilde{\mathbf{D}_{cT}^{eff}} \cdot \nabla \tilde{T}_c\} + \nabla \cdot \left(\{\rho_g\}^g D_v \left(\epsilon_g \nabla \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \frac{\tilde{\rho}_v}{\{\rho_g\}^g} dS \right) \right) \\
 & + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \\
 & + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \cdot \mathbf{n}_{gi} dS
 \end{aligned} \tag{III.259}$$

On constate que $\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle_c^g + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle_c) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS$ et $\frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \cdot \mathbf{n}_{gi} dS$ s'annulent du fait des conditions de continuité de flux de vapeur à l'interface chanvre / air humide. Le flux est nul à la surface des polymères.

$$\begin{aligned}
 & (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c \epsilon_c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\dot{m}_l\} + \nabla \cdot (\{\rho_v\} \{\mathbf{v}_g\}) \\
 & = \nabla \cdot \left(\{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{\rho_v\} + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{\rho}_{vc} \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\
 & + \nabla \cdot \{\widetilde{\mathbf{D}_{cv}^{eff}} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc}\} + \nabla \cdot \left(\{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{T\}^c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\
 & + \nabla \cdot \{\widetilde{\mathbf{D}_{cT}^{eff}} \cdot \nabla \tilde{T}_c\} + \nabla \cdot \left(\{\rho_g\}^g D_v \left(\epsilon_g \nabla \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \frac{\tilde{\rho}_v}{\{\rho_g\}^g} dS \right) \right)
 \end{aligned} \tag{III.260}$$

III.8 FERMETURE A L'ECHELLE DU RESEAU DE FIBRES

On utilise la même démarche employée précédemment dans la section III.4, i.e. on soustrait l'équation moyenne non fermée à l'équation locale multipliée par la fraction massique de la phase concernée, dans laquelle on a introduit la décomposition de Gray.

III.8.1 Conservation de l'énergie

III.8.1.1 Chanvre

On obtient dans le cas du chanvre l'expression de l'évolution de la déviation de la température couplée avec la pression partielle de vapeur :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_c \langle \widetilde{\rho C_p} \rangle_c \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \epsilon_c \langle \rho C_p \rangle_c \frac{\partial \widetilde{T}_c}{\partial t} + \epsilon_c \langle \dot{m}_{cond} \widetilde{\Delta h_{cond}} \rangle + \epsilon_c \langle \dot{m}_{sorp} \widetilde{\Delta h_{sorp}} \rangle \\
 = \epsilon_c \nabla \cdot \left(\{ \lambda_{cT}^{eff} \}^c \cdot \nabla \widetilde{T}_c + \widetilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{T\} + \widetilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c - \{ \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c \}^c \right) \\
 + \epsilon_c \nabla \cdot \left(\{ \lambda_{cv}^{eff} \}^c \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc} + \widetilde{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \{ \rho_v \} + \widetilde{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c - \{ \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc} \}^c \right) \quad (III.261) \\
 - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS
 \end{aligned}$$

Note : les termes $\langle \dot{m}_{cond} \widetilde{\Delta h_{cond}} \rangle$ et $\langle \dot{m}_{sorp} \widetilde{\Delta h_{sorp}} \rangle$ correspondent aux déviations des termes $\langle \dot{m}_{cond} \Delta h_{cond} \rangle$ et $\langle \dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp} \rangle$, qui sont définis localement à cette échelle et se mettent donc sous la forme : $\langle \dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp} \rangle = \{ \langle \dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp} \rangle \}^c + \langle \dot{m}_{sorp} \widetilde{\Delta h_{sorp}} \rangle$, à ne pas confondre avec la moyenne de la déviation (qui est nulle) définie à l'échelle de la fibre. Ces termes doivent être développés afin d'identifier les termes sources.

Avant d'entreprendre le développement du terme $\langle \dot{m}_{cond} \widetilde{\Delta h_{cond}} \rangle$, on supposera que la chaleur latente de condensation peut être considérée comme constante dans le VER et approximée par sa valeur à la température $\{T_c\}^c$:

$$\langle \Delta h_{cond} \rangle^c \gg \widetilde{\Delta h_{cond}} \quad (III.262)$$

Et donc :

$$\{ \Delta h_{cond} \}^c \simeq \langle \Delta h_{cond} \rangle^c = (c_{pl} - c_{pg}) \{T\} \quad (III.263)$$

On peut donc écrire :

$$\langle \dot{m}_{cond} \widetilde{\Delta h_{cond}} \rangle = (\langle \dot{m}_{cond} \rangle - \{ \langle \dot{m}_{cond} \rangle \}^c) \Delta h_{cond} \quad (III.264)$$

Il reste alors à développer la déviation du taux de changement de phase.

On utilise l'expression obtenue précédemment (équation (III.181)) :

$$\langle \dot{m}_{cond} \rangle = \mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \rho_{cv} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla T_c + m_v^{cond} \frac{\partial \rho_{vc}}{\partial t} \quad (\text{III.265})$$

En introduisant la décomposition de Gray on a alors :

$$\begin{aligned} \langle \dot{m}_{cond} \rangle - \{\langle \dot{m}_{cond} \rangle\}^c &= \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\}^c \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc} + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{cv} \\ &+ \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\}^c \cdot \nabla \widetilde{T}_c + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} \cdot \nabla \{T\} + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} \cdot \nabla \widetilde{T}_c - \frac{1}{V} \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{\rho}_{vc} \mathbf{n}_{ci} dS \\ &- \{\widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc}\}^c - \frac{1}{V} \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{T}_c \mathbf{n}_{ci} dS \\ &- \{\widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} \cdot \nabla \widetilde{T}_c\}^c + \{m_v^{cond}\}^c \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t} + \widetilde{m_v^{cond}} \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t} + \widetilde{m_v^{cond}} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \\ &- \{\widetilde{m_v^{cond}} \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t}\} \end{aligned} \quad (\text{III.266})$$

Afin de simplifier l'expression, on fait l'hypothèse que les moyennes des produits de déviations sont négligeables devant les produits de termes moyens. Même si cette hypothèse est couramment utilisée dans la méthode de prise de moyenne, il est délicat de la justifier rigoureusement, notamment à cause de la présence de gradient de déviations, qui ne sont pas forcément petits. On peut cependant remarquer que les paramètres \mathbf{m}_{gT}^{cond} , \mathbf{m}_{gv}^{cond} et m_v^{cond} varient principalement en fonction de la teneur en eau de la fibre (et aussi en fonction de la microstructure), qui varie a priori très lentement au sein du VER.

En réarrangeant on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \langle \dot{m}_{cond} \rangle - \{\langle \dot{m}_{cond} \rangle\}^c &= \mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc} + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} \cdot \nabla \{T\} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \widetilde{T}_c \\ &- \frac{1}{V} \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{\rho}_{vc} \mathbf{n}_{ci} dS - \frac{1}{V} \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{T}_c \mathbf{n}_{ci} dS \\ &+ m_v^{cond} \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t} + \widetilde{m_v^{cond}} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{III.267})$$

Il est important de constater que les termes macroscopiques se trouvent tous sous la forme d'un produit avec une déviation d'une propriété effective de la fibre ($\widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}}$, $\widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}}$ et $\widetilde{m_v^{cond}}$). Ces termes, comme on l'a souligné auparavant sont a priori très petits et il sera possible de les négliger sous certaines contraintes.

Concernant le terme $\langle \widetilde{\dot{m}_{sorp}} \Delta h_{sorp} \rangle$, on suppose comme précédemment que l'enthalpie de sorption, mais aussi le paramètre K sont constants dans le VER. On écrit alors :

$$\langle \dot{m}_{sorp} \rangle - \{ \langle \dot{m}_{sorp} \rangle \}^c = K \widetilde{\mathcal{A}}_{gs} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + K \mathcal{A}_{gs} \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t} + K \left\{ \widetilde{\mathcal{A}}_{gs} \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t} \right\}^c \quad (\text{III.268})$$

En négligeant le dernier terme, on obtient :

$$\langle \dot{m}_{sorp} \rangle - \{ \langle \dot{m}_{sorp} \rangle \}^c = K \widetilde{\mathcal{A}}_{gs} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + K \mathcal{A}_{gs} \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t} \quad (\text{III.269})$$

La même remarque que dans le développement précédent s'applique ici, à savoir que le terme macroscopique est associé à une déviation d'une propriété de la fibre (surface de contact air humide / chanvre) qui ne dépend que de la teneur en eau et de la microstructure.

L'équation de conservation de l'énergie gouvernant les déviations de température et masse volumique au sein du chanvre est finalement :

$$\begin{aligned} & \epsilon_c \langle \widetilde{\rho C_p} \rangle_c \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \epsilon_c \langle \rho C_p \rangle_c \frac{\partial \widetilde{T}_c}{\partial t} + \epsilon_c \{ \Delta h_{cond} \}^c (\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc} + \widetilde{\mathbf{m}}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \{\rho_v\} \\ & + \widetilde{\mathbf{m}}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \{T\} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \widetilde{T}_c - \frac{1}{V} \{ \mathbf{m}_{gv}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{\rho}_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS \\ & - \frac{1}{V} \{ \mathbf{m}_{gT}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{T}_c \mathbf{n}_{ci} dS + m_v^{cond} \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t} + \widetilde{m}_v^{cond} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t}) \\ & + \epsilon_c \{ \Delta h_{sorp} \}^c K \left(\widetilde{\mathcal{A}}_{gs} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \mathcal{A}_{gs} \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t} \right) \\ & = \epsilon_c \nabla \cdot \left(\{ \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \}^c \cdot \nabla \widetilde{T}_c + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{T\} + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c - \{ \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c \}^c \right) \\ & + \epsilon_c \nabla \cdot \left(\{ \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \}^c \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc} + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc} - \{ \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc} \}^c \right) \\ & - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c + \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc}) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \end{aligned} \quad (\text{III.270})$$

III.8.1.2 Air humide

L'application de la procédure décrite précédemment permet d'obtenir l'équation gouvernant la déviation de température dans l'air humide :

$$\begin{aligned} \epsilon_g \rho_g (C_p)_g \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial t} = \epsilon_g \nabla \cdot \left(\lambda_g \nabla \tilde{T}_g - \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \tilde{T}_g dS \right) \\ - \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \lambda_g \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla T_g dS \end{aligned} \quad (\text{III.271})$$

III.8.1.3 Polymère

On a de la même manière pour le polymère :

$$\epsilon_p \rho_p (C_p)_p \frac{\partial \tilde{T}_p}{\partial t} = \epsilon_p \lambda_p \Delta \tilde{T}_p - \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{pi}} \tilde{T}_p \mathbf{n}_{pi} dS \right) - \frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{pi}} \lambda_p \nabla T_p \cdot \mathbf{n}_{pi} dS \quad (\text{III.272})$$

III.8.2 Conservation de la masse

III.8.2.1 Chanvre

Comme pour la conservation de l'énergie, on obtient ici un problème couplé pour les déviations de température et de masse volumique de vapeur dans le chanvre :

$$\begin{aligned} \epsilon_c \{ \epsilon_{gc} \}^c \frac{\partial \tilde{\rho}_{vc}}{\partial t} + \epsilon_c \langle \tilde{m}_l \rangle = \\ \epsilon_c \nabla \cdot \left(\{ \mathbf{D}_{cv}^{eff} \}^c \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} + \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \{ \rho_v \} + \widetilde{\mathbf{D}_{cv}^{eff}} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} - \{ \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} \}^c \right) \\ + \epsilon_c \nabla \cdot \left(\{ \mathbf{D}_{cT}^{eff} \}^c \cdot \nabla \tilde{T}_c + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{ T \} + \widetilde{\mathbf{D}_{cT}^{eff}} \cdot \nabla \tilde{T}_c - \{ \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c \}^c \right) \\ - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \end{aligned} \quad (\text{III.273})$$

Le terme $\langle \dot{m}_l \rangle = \langle \dot{m}_{sorpt} \rangle - \{\langle \dot{m}_{sorpt} \rangle\}^c + \langle \dot{m}_{cond} \rangle - \{\langle \dot{m}_{cond} \rangle\}^c$ a déjà été développé précédemment et on a finalement :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_c \frac{\partial \tilde{\rho}_{vc}}{\partial t} (\{\epsilon_{gc}\}^c + K \mathcal{A}_{gs} + m_v^{cond}) + \epsilon_c \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} (K \mathcal{A}_{gs} + \widetilde{m_v^{cond}}) + \epsilon_c \mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} \\
 + \epsilon_c \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \epsilon_c \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} \cdot \nabla \{T\} + \epsilon_c \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \tilde{T}_c \\
 - \frac{\epsilon_c}{V} \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{\rho}_{vc} \mathbf{n}_{ci} dS - \frac{\epsilon_c}{V} \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \mathbf{n}_{ci} dS = \\
 \epsilon_c \nabla \cdot (\{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} + \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \widetilde{\mathbf{D}_{cv}^{eff}} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} - \{\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc}\}^c) \\
 + \epsilon_c \nabla \cdot (\{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c \cdot \nabla \tilde{T}_c + \widetilde{\mathbf{D}_{cT}^{eff}} \cdot \nabla \{T\} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c - \{\mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c\}^c) \\
 - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS
 \end{aligned} \tag{III.274}$$

III.8.2.2 Air humide

En répétant la procédure de fermeture on obtient dans l'air humide :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\{\rho_v\}^g \{\mathbf{v}_g\}^g) - \nabla \cdot \{\tilde{\rho}_v \tilde{\mathbf{v}}_g\} + \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{v}_g) = \\
 \nabla \cdot \left(\rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) - \{\rho_g\}^g D_v \left(\nabla \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \frac{\tilde{\rho}_v}{\{\rho_g\}^g} dS \right) \right) \\
 - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \mathbf{n}_{gi} dS
 \end{aligned} \tag{III.275}$$

Dans notre application, on peut considérer que :

$$\nabla \frac{\tilde{\rho}_v}{\{\rho_g\}^g} \simeq \frac{\nabla \tilde{\rho}_v}{\{\rho_g\}^g}$$

En effet :

$$\{\rho_g\}^g \nabla \frac{\tilde{\rho}_v}{\{\rho_g\}^g} = \{\rho_g\}^g \frac{\{\rho_g\}^g \nabla \tilde{\rho}_v - \tilde{\rho}_v \nabla \{\rho_g\}^g}{\{\rho_g\}^{g^2}} = \nabla \tilde{\rho}_v - \frac{\tilde{\rho}_v}{\{\rho_g\}^g} \nabla \{\rho_g\}^g$$

Si $\frac{\rho_v}{\rho_g} \ll 1$, ce qui est le cas ici, il est clair que :

$$\rho_g \nabla \frac{\rho_v}{\rho_g} \simeq \nabla \rho_v$$

En développant :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial t} + \nabla \cdot (-\{\tilde{\rho}_v \tilde{\mathbf{v}}_g\} + \tilde{\rho}_v \{\mathbf{v}_g\}^g + \{\rho_v\}^g \tilde{\mathbf{v}}_g + \tilde{\rho}_v \tilde{\mathbf{v}}_g) \\
 = D_v \nabla \cdot \left(\nabla \rho_v - \nabla \{\rho_g\}^g - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \tilde{\rho}_v \mathbf{n}_{gi} dS \right) \\
 - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n}_{gi} dS
 \end{aligned} \quad (\text{III.276})$$

En négligeant $\nabla \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \tilde{\rho}_v \mathbf{n}_{gi} dS$ ainsi que $\nabla \cdot \{\tilde{\rho}_v \tilde{\mathbf{v}}_g\}$ devant $\nabla \cdot (\nabla \tilde{\rho}_v)$, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}_v \{\mathbf{v}_g\}^g + \{\rho_v\}^g \tilde{\mathbf{v}}_g + \tilde{\rho}_v \tilde{\mathbf{v}}_g) = D_v \Delta \tilde{\rho}_v - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \tilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.277})$$

Ou plus simplement :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}_v \{\mathbf{v}_g\}^g + \rho_v \tilde{\mathbf{v}}_g) = D_v \Delta \tilde{\rho}_v - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \tilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.278})$$

Dans le cas incompressible, le problème se simplifie :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial t} + \{\mathbf{v}_g\}^g \cdot \nabla \tilde{\rho}_v + \tilde{\mathbf{v}}_g \cdot \nabla \rho_v = D_v \Delta \tilde{\rho}_v - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \tilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.279})$$

III.8.3 Conditions aux limites

❖ *Interface chanvre / polymère*

Continuité de la température :

$$\tilde{T}_c = \tilde{T}_p \text{ sur } S_{cp} \quad (\text{III.280})$$

Conservation du flux de chaleur :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_{cp} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c - \mathbf{n}_{cp} \cdot \lambda_p \nabla \tilde{T}_p \\
 = \underbrace{\mathbf{n}_{cp} \cdot (\lambda_p \mathbf{I} - \{\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}\}^c) \cdot \nabla \{T\} - \mathbf{n}_{cp} \cdot \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{T\}}_{source} \text{ sur } S_{cp}
 \end{aligned} \quad (\text{III.281})$$

Conservation de la masse de vapeur :

$$\nabla \tilde{\rho}_{vc} \cdot \mathbf{n}_{cp} = \underbrace{-\nabla\{\rho_v\} \cdot \mathbf{n}_{cp}}_{source} \text{ sur } S_{cp} \quad (\text{III.282})$$

❖ *Interface chanvre / air humide*

Continuité de la température :

$$\tilde{T}_c = \tilde{T}_g \text{ sur } S_{cg} \quad (\text{III.283})$$

Conservation du flux de chaleur. On rappelle que l'on a négligé le transfert de chaleur par convection. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{cg} \cdot \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c - \mathbf{n}_{cg} \cdot \lambda_g \nabla \tilde{T}_g + \mathbf{n}_{cg} \cdot \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{cv} \\ = + \underbrace{\mathbf{n}_{cg} \cdot (\lambda_g \mathbf{I} - \lambda_{cT}^{eff}) \cdot \nabla\{T\}}_{source} - \underbrace{\mathbf{n}_{cg} \cdot \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla\{\rho_v\}}_{source} \text{ sur } S_{cg} \end{aligned} \quad (\text{III.284})$$

Conservation du flux de vapeur :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} + \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c + \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla\{\rho_v\} + \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla\{T\} \\ = \mathbf{n}_{cg} \cdot \rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \text{ sur } S_{cg} \end{aligned} \quad (\text{III.285})$$

En utilisant à nouveau le fait que :

$$\rho_g D_v \nabla \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \simeq D_v \nabla \rho_v \text{ sur } S_{cg} \quad (\text{III.286})$$

On a finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} + \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c - \mathbf{n}_{cg} \cdot D_v \nabla(\tilde{\rho}_v) \\ = \underbrace{\mathbf{n}_{cg} \cdot (D_v \mathbf{I} - \mathbf{D}_{cv}^{eff}) \cdot \nabla\{\rho_v\}}_{source} + \underbrace{\mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla\{T\}}_{source} \text{ sur } S_{cg} \end{aligned} \quad (\text{III.287})$$

❖ *Interface air humide / polymère*

Continuité de la température :

$$\tilde{T}_g = \tilde{T}_p \text{ sur } S_{pg} \quad (\text{III.288})$$

Conservation du flux de chaleur :

$$\lambda_g \nabla \tilde{T}_g \cdot \mathbf{n}_{pg} - \lambda_p \nabla \tilde{T}_p \cdot \mathbf{n}_{pg} = \underbrace{(\lambda_p - \lambda_g) \nabla\{T\} \cdot \mathbf{n}_{pg}}_{source} \text{ sur } S_{pg} \quad (\text{III.289})$$

Conditions d'imperméabilité pour l'air humide :

$$\rho_g \tilde{\mathbf{v}}_g \cdot \mathbf{n}_{pg} = - \underbrace{\rho_g \{\mathbf{v}_g\}^g \cdot \mathbf{n}_{pg}}_{source} \text{ sur } S_{pg} \quad (\text{III.290})$$

Et pour la vapeur :

$$\mathbf{n}_{gp} \cdot D_v \nabla(\tilde{\rho}_v) = - \underbrace{\mathbf{n}_{gp} \cdot D_v \nabla\{\rho_v\}}_{source} \text{ sur } S_{pg} \quad (\text{III.291})$$

III.8.4 Variables de fermetures

Finalement, les problèmes gouvernant les déviations font apparaître trois termes sources : $\nabla\{\rho_v\}$ et $\nabla\{T\}$ et $\frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t}$ (ce dernier terme n'intervenant que dans les équations de conservation au sein des fibres de chanvre), ce qui permet de représenter les déviations sous la forme suivante :

$$\tilde{T}_g = \mathbf{s}_{gT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_g} \mathbf{s}_{gv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \quad (\text{III.292})$$

$$\tilde{T}_p = \mathbf{s}_{pT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_p} \mathbf{s}_{pv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \quad (\text{III.293})$$

$$\tilde{T}_c = \mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \quad (\text{III.294})$$

$$\tilde{\rho}_v = \mathbf{r}_{gv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_v} \mathbf{r}_{gT} \cdot \nabla\{T\} \quad (\text{III.295})$$

$$\tilde{\rho}_{vc} = \mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla\{T\} + r_{cv} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \quad (\text{III.296})$$

Où les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{s} sont les variables de fermeture et λ_{cv}^* , λ_{cT}^* , D_{cT}^* et D_{cv}^* sont les scalaires qui peuvent être choisis comme la plus grande valeur propre, la valeur moyenne des valeurs propres, etc. des tenseurs effectifs correspondants. Selon l'importance relative de ces termes, le couplage peut éventuellement se simplifier, il est par exemple possible que D_{cT}^* soit petit devant D_{cv}^* , i.e. la diffusion de vapeur induite par le gradient de température est négligeable devant celle induite par le gradient de pression de vapeur : il faut évaluer les termes grâce au problème de fermeture à petite échelle.

Les relations de fermeture étant posées, il reste à les introduire dans les problèmes locaux définis précédemment

III.8.5 Problèmes de fermetures

III.8.5.1 Conservation de l'énergie

Comme dans le premier changement d'échelle, on supposera que les problèmes sont quasi-statiques. Les contraintes pour que cette hypothèse soit valable peuvent se mettre sous la même forme que pour le premier changement d'échelle, en comparant les ordres de grandeur du terme diffusif et du terme d'accumulation :

$$t \gg \rho_i (C_p)_i \frac{l^2}{\lambda_i} \quad (\text{III.297})$$

Les longueurs caractéristiques identifiées par analyse d'images (cf section II.4.2) sont d'environ 420 μm pour les distances inter-fibres et d'environ 100 μm pour les diamètres de fibres. On obtient alors pour les 3 phases un temps caractéristique qui doit être supérieur à moins d'une milliseconde. L'hypothèse de quasi-staticité du problème de fermeture est donc pleinement justifiée à cette échelle.

D'autre part, on négligera également les termes $\frac{\partial \widetilde{\rho_{cv}}}{\partial t}$ devant $\frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t}$, qui – étant une variable macroscopique – est considéré constant dans le VER.

Chanvre :

L'équation (III.270) peut se simplifier en développant certains ordres de grandeurs :

$$\nabla \cdot \{\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c\} = \mathcal{O} \left(\frac{\lambda_{cT}^{eff} \widetilde{T}_c}{lL} \right) \quad (\text{III.298})$$

$$\nabla \cdot (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c) = \mathcal{O} \left(\frac{\lambda_{cT}^{eff} \widetilde{T}_c}{l^2} \right) \quad (\text{III.299})$$

D'où $\nabla \cdot \{\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c\} \ll \nabla \cdot (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c)$.

Concernant le terme $\nabla \cdot (\widetilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{T\})$, il est plus délicat de statuer car comme le terme moyen est multiplié par une déviation, $\widetilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{T_c\}^c$ varie comme $\widetilde{\lambda}_{cT}^{eff}$. Il sera possible de le négliger si on suppose que les propriétés thermiques effectives des fibres varient peu dans le VER. On le conserve donc pour la suite.

On a alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_c \langle \widetilde{\rho C_p} \rangle_c \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \epsilon_c \{ \Delta h_{cond} \}^c & \left(\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \widetilde{\rho_{vc}} + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} \cdot \nabla \{ \rho_v \} + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} \cdot \nabla \{T\} \right. \\ & + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \widetilde{T}_c - \frac{1}{V} \{ \mathbf{m}_{gv}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{\rho_v} \mathbf{n}_{ci} dS \\ & \left. - \frac{1}{V} \{ \mathbf{m}_{gT}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \widetilde{T}_c \mathbf{n}_{ci} dS + \widetilde{m_v^{cond}} \frac{\partial \{ \rho_v \}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (III.300)$$

$$\begin{aligned} & + \epsilon_c \{ \Delta h_{sorp} \}^c K \widetilde{\mathcal{A}}_{gs} \frac{\partial \{ \rho_v \}}{\partial t} = \epsilon_c \nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{T\}) \\ & + \epsilon_c \nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{\rho_{vc}} + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \{ \rho_v \}) - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{T}_c + \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \widetilde{\rho_{vc}}) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \end{aligned}$$

On développe tout d'abord le terme de changement de phase :

$$\begin{aligned} (\langle \dot{m}_{cond} \rangle - \{ \langle \dot{m}_{cond} \rangle \}^c) & = \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \left(\mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla \{ \rho_v \} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + r_{cv} \frac{\partial \{ \rho_v \}}{\partial t} \right) \right. \\ & + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} \cdot \nabla \{ \rho_v \} + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} \cdot \nabla \{T\} \\ & + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \left(\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla \{ \rho_v \} + s_{cv} \frac{\partial \{ \rho_v \}}{\partial t} \right) \\ & - \frac{1}{V} \{ \mathbf{m}_{gv}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \left(\mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla \{ \rho_v \} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + r_{cv} \frac{\partial \{ \rho_v \}}{\partial t} \right) \mathbf{n}_{ci} dS \end{aligned} \quad (III.301)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{V} \{ \mathbf{m}_{gT}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \left(\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla \{ \rho_v \} \right. \\ & \left. \left. + s_{cv} \frac{\partial \{ \rho_v \}}{\partial t} \right) \mathbf{n}_{ci} dS + \widetilde{m_v^{cond}} \frac{\partial \{ \rho_v \}}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

On rappelle que les dérivées secondes des termes macroscopiques sont négligées. En mettant en facteur les gradients macroscopiques, on obtient une expression pour la contribution liée à la condensation /évaporation de la forme :

$$\begin{aligned}
 (\langle \dot{m}_{cond} \rangle - \{\langle \dot{m}_{cond} \rangle\}^c) = & \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \nabla \mathbf{s}_{cv} \right. \\
 & - \frac{1}{V} \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{r}_{cv} dS \\
 & \left. - \frac{1}{V} \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{s}_{cv} dS \right] \cdot \nabla \{\rho_v\} \\
 & + \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \nabla \mathbf{r}_{cT} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} \right. \\
 & - \frac{1}{V} \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{r}_{cT} dS \\
 & \left. - \frac{1}{V} \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{s}_{cT} dS \right] \cdot \nabla \{T\} \\
 & + \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} + \widetilde{\mathbf{m}_v^{cond}} - \frac{1}{V} \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} r_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS \right. \\
 & \left. - \frac{1}{V} \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} s_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS \right] \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{III.302}$$

On procède de même pour le membre de droite de l'équation (III.300) :

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_c \nabla \cdot (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c + \tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{T\}) \\
 & + \epsilon_c \nabla \cdot (\lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} + \tilde{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\}) - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc}) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \\
 & = \left[\epsilon_c \nabla \cdot \left(\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT} + \tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \cdot \left(\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \nabla \mathbf{r}_{cT} + \mathbf{I} \right) dS \right] \cdot \nabla \{T\} \\
 & + \left[\epsilon_c \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \tilde{\lambda}_{cv}^{eff} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \cdot \left(\lambda_{cT}^{eff} \cdot \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \nabla \mathbf{s}_{cv} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \mathbf{I} \right) dS \right] \cdot \nabla \{\rho_v\} \\
 & + [\epsilon_c \nabla \cdot (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla s_{cv} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla r_{cv}) \\
 & - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \cdot (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla s_{cv} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla r_{cv}) dS] \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{III.303}$$

Afin de simplifier l'écriture, on peut remarquer que les termes intégraux des équations (III.302) et (III.303) sont des constantes dans le volume de prise de moyenne. On notera que ces termes sont généralement négligeables (cf calculs numériques dans Lux, 2005). On les conserve ici en les mettant sous la forme :

$$\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \cdot \left(\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \nabla \mathbf{r}_{cT} + \mathbf{I} \right) dS = \mathbf{c}_{cT}^T \tag{III.304}$$

$$\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \cdot \left(\lambda_{cT}^{eff} \cdot \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \nabla \mathbf{s}_{cv} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \mathbf{I} \right) dS = \mathbf{c}_{cv}^T \tag{III.305}$$

$$\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \cdot (\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla s_{cv} + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla r_{cv}) dS = c_{cvt}^T \tag{III.306}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \{ \mathbf{m}_{gv}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{r}_{cv} dS \\ & + \frac{1}{V} \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \{ \mathbf{m}_{gT}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{s}_{cv} dS = \mathbf{k}_v^{cond} \end{aligned} \quad (III.307)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{ \mathbf{m}_{gv}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{r}_{cT} dS \\ & + \frac{1}{V} \{ \mathbf{m}_{gT}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{s}_{cT} dS = \mathbf{k}_T^{cond} \end{aligned} \quad (III.308)$$

$$\frac{1}{V} \{ \mathbf{m}_{gv}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} r_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS \frac{1}{V} + \{ \mathbf{m}_{gT}^{cond} \}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} s_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS = k_{vt}^{cond} \quad (III.309)$$

Finalement l'équation (III.300) devient :

$$\begin{aligned} & \epsilon_c \{ \Delta h_{cond} \}^c \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \nabla \mathbf{s}_{cv} - \mathbf{k}_v^{cond} \right] \cdot \nabla \{ \rho_v \} \\ & + \epsilon_c \{ \Delta h_{cond} \}^c \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \nabla \mathbf{r}_{cT} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} - \mathbf{k}_T^{cond} \right] \cdot \nabla \{ T \} \\ & + \left[\epsilon_c \{ \Delta h_{cond} \}^c \left(\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla r_{cv} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla s_{cv} + \widetilde{m_v^{cond}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - k_{vt}^{cond} \right) + \epsilon_c \{ \Delta h_{sorp} \}^c K \widetilde{\mathcal{A}_{gs}} \right] \frac{\partial \{ \rho_v \}}{\partial t} \\ & = \left[\epsilon_c \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \right) - \mathbf{c}_{cT}^T \right] \cdot \nabla \{ T \} \\ & + \left[\epsilon_c \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} + \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cv}^{eff} \right) - \mathbf{c}_{cv}^T \right] \cdot \nabla \{ \rho_v \} \\ & + \left[\epsilon_c \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla s_{cv} + \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla r_{cv} \right) - \mathbf{c}_{cvt}^T \right] \frac{\partial \{ \rho_v \}}{\partial t} \end{aligned} \quad (III.310)$$

D'où on tire les trois problèmes indépendants suivants :

Selon $\nabla\{\rho_v\}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_c\{\Delta h_{cond}\}^c \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \nabla \mathbf{s}_{cv} - \mathbf{k}_v^{cond} \right] \\ = \epsilon_c \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} + \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cv}^{eff} \right) - \mathbf{c}_{cv}^T \end{aligned} \quad (III.311)$$

Selon $\nabla\{T\}$:

$$\begin{aligned} + \epsilon_c\{\Delta h_{cond}\}^c \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \nabla \mathbf{r}_{cT} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} - \mathbf{k}_T^{cond} \right] \\ = \epsilon_c \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \right) - \mathbf{c}_{cT}^T \end{aligned} \quad (III.312)$$

Selon $\frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_c\{\Delta h_{cond}\}^c \left(\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} + \widetilde{\mathbf{m}_v^{cond}} - \mathbf{k}_{vt}^{cond} \right) + \epsilon_c\{\Delta h_{sorp}\}^c K \widetilde{\mathcal{A}}_{gs} = \\ \epsilon_c \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} + \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} \right) - \mathbf{c}_{cvT}^T \end{aligned} \quad (III.313)$$

On remarque ici le couplage au niveau de la fermeture entre le transfert de vapeur et de chaleur ainsi qu'avec les phénomènes d'adsorption et de changement de phase au travers du couplage entre les variables dépendant de la pression de vapeur (\mathbf{r}_{cT} , \mathbf{r}_{cv} et \mathbf{r}_{cv}) d'une part et les variables dépendant de la température d'autre part (\mathbf{s}_{cT} , \mathbf{s}_{cv} et \mathbf{s}_{cv}).

Air humide :

Après application des hypothèses générales à la fermeture, on a :

$$0 = \epsilon_g \nabla \cdot (\lambda_g \nabla \tilde{T}_g) - \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{\partial\Omega_{gi}} \lambda_g \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \tilde{T}_g dS \quad (III.314)$$

En remplaçant les déviations on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = \epsilon_g \nabla \cdot \left(\nabla \mathbf{s}_{gT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_g} \nabla \mathbf{s}_{gv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \right) \\ - \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \left(\mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{s}_{gT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_g} \nabla \mathbf{s}_{gv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \right) dS \end{aligned} \quad (III.315)$$

Soit les deux problèmes selon $\nabla\{T\}$ et $\nabla\{\rho_v\}$ respectivement :

$$\Delta s_{gT} = \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla s_{gT} dS \quad (\text{III.316})$$

$$\Delta s_{gv} = \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla s_{gv} dS \quad (\text{III.317})$$

Polymère :

On a :

$$\Delta \tilde{T}_p = \epsilon_p^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{pi}} \nabla \tilde{T}_p \cdot \mathbf{n}_{pi} dS \quad (\text{III.318})$$

En introduisant les variables de fermeture, on obtient deux problèmes selon $\nabla\{T\}$ et $\nabla\{\rho_v\}$ respectivement :

$$\Delta s_{pT} = \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} \cdot \nabla s_{pT} dS \quad (\text{III.319})$$

$$\Delta s_{pv} = \epsilon_g^{-1} \frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} \cdot \nabla s_{pv} dS \quad (\text{III.320})$$

III.8.5.2 Conservation de la masse

Afin de développer les problèmes de fermeture concernant la conservation de la masse, on développe tout d'abord les contraintes qui nous permettent de supposer les problèmes locaux comme étant quasi-statiques en comparant le terme diffusif avec le terme d'accumulation. On obtient :

$$t_i \gg \frac{l_i^2}{D_i} \quad (\text{III.321})$$

Dans le cas le plus défavorable (i.e. pour le plus grand coefficient de diffusion, c'est-à-dire dans l'espace poral inter-fibre), D_v est de l'ordre de $2,56 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$. En prenant $l = 420 \mu\text{m}$ (ce qui est surestimé, car la distance inter-fibres moyenne est a priori supérieure à la distance caractéristique de variation de la déviation de pression de vapeur), le temps caractéristique est inférieur au centième de seconde, ce qui est très acceptable dans le cas des durées qui nous intéressent ici.

Chanvre :

Comme dans le cas de la conservation de l'énergie au sein du chanvre, on néglige les termes moyen contenant un gradient de déviation $\{\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc}\}^c$ et $\{\mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c\}^c$. On applique également l'hypothèse de quasi-staticité. L'équation (III.274) devient :

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_c \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} (K \tilde{\mathcal{A}}_{gs} + \widetilde{m_v^{cond}}) + \epsilon_c \mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} \\
 & + \epsilon_c \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \epsilon_c \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} \cdot \nabla \{T\} + \epsilon_c \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \tilde{T}_c \\
 & - \frac{\epsilon_c}{V} \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{\rho}_{vc} \mathbf{n}_{ci} dS - \frac{\epsilon_c}{V} \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\}^c \cdot \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \mathbf{n}_{ci} dS = \\
 & \epsilon_c \nabla \cdot (\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \tilde{\rho}_{vc} + \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\}) \\
 & + \epsilon_c \nabla \cdot (\mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \tilde{T}_c + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{T\}) - \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} (\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \rho_{vc} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla T_c) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS
 \end{aligned} \tag{III.322}$$

On a déjà développé la déviation de taux de changement phase précédemment.

Afin de simplifier l'écriture on définit les constantes :

$$\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \left[\mathbf{n}_{ci} \cdot \left(\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot (\nabla \mathbf{r}_{cv} + \mathbf{I}) + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} \right) \right] dS = \mathbf{c}_{cv}^v \tag{III.323}$$

$$\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \left[\mathbf{n}_{ci} \cdot \left(\frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot (\nabla \mathbf{s}_{cT} + \mathbf{I}) \right) \right] dS = \mathbf{c}_{cT}^v \tag{III.324}$$

Et :

$$\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \cdot [\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT}] dS = \mathbf{c}_{cvt}^v \tag{III.325}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_c \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \nabla \mathbf{s}_{cv} - \mathbf{k}_v^{cond} \right] \cdot \nabla \{\rho_v\} \\
 & + \epsilon_c \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \nabla \mathbf{r}_{cT} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} - \mathbf{k}_T^{cond} \right] \cdot \nabla \{T\} \\
 & + \epsilon_c \left(\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} + \widetilde{\mathbf{m}_v^{cond}} - \mathbf{k}_{vt}^{cond} + K \widetilde{\mathcal{A}_{gs}} \right) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \\
 & = \left[\epsilon_c \nabla \cdot \left(\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{gv} + \widetilde{\mathbf{D}}_{cv}^{eff} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} \right) - \mathbf{c}_{cv}^v \right] \cdot \nabla \{\rho_v\} \\
 & + \left[\epsilon_c \nabla \cdot \left(\frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{gT} + \widetilde{\mathbf{D}}_{cT}^{eff} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right) - \mathbf{c}_{cT}^v \right] \cdot \nabla \{T\} \\
 & + \left[\epsilon_c \nabla \cdot \left(\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{gv} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right) - \mathbf{c}_{cvt}^v \right] \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{III.326}$$

Ce qui permet d'écrire les trois problèmes de fermetures indépendants :

Suivant $\nabla \{\rho_v\}$:

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_c \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \widetilde{\mathbf{m}_{gv}^{cond}} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \nabla \mathbf{s}_{cv} - \mathbf{k}_v^{cond} \right] \\
 & = \epsilon_c \nabla \cdot \left(\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{gv} + \widetilde{\mathbf{D}}_{cv}^{eff} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} \right) - \mathbf{c}_{cv}^v
 \end{aligned} \tag{III.327}$$

Suivant $\nabla \{T\}$:

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_c \left[\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \nabla \mathbf{r}_{cT} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \widetilde{\mathbf{m}_{gT}^{cond}} - \mathbf{k}_T^{cond} \right] \\
 & = \epsilon_c \nabla \cdot \left(\frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{gT} + \widetilde{\mathbf{D}}_{cT}^{eff} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right) - \mathbf{c}_{cT}^v
 \end{aligned} \tag{III.328}$$

Suivant $\frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} + \widetilde{\mathbf{m}_v^{cond}} - \mathbf{k}_{vt}^{cond} + K \widetilde{\mathcal{A}_{gs}} \\
 & = \epsilon_c \nabla \cdot \left(\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{gv} + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right) - \mathbf{c}_{cvt}^v
 \end{aligned} \tag{III.329}$$

Le problème couplé obtenu traduit, comme dans le cas de la conservation de l'énergie, le couplage entre le transfert de masse et de chaleur ainsi que d'adsorption et de changement de phase.

Air humide :

L'équation (III.279) peut s'écrire :

$$\{\mathbf{v}_g\}^g \cdot \nabla \widetilde{\rho}_v + \widetilde{\mathbf{v}}_g \cdot \nabla \widetilde{\rho}_v + \widetilde{\mathbf{v}}_g \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle = D_v \Delta \widetilde{\rho}_v - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=p,c} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \widetilde{\rho}_v \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \quad (\text{III.330})$$

En introduisant les expressions des déviations, on obtient :

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{v}_g\}^g \cdot \nabla \left(\mathbf{r}_{gv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_v} \mathbf{r}_{gT} \cdot \nabla \{T\} \right) + \widetilde{\mathbf{v}}_g \\ & \quad \cdot \nabla \left(\{\rho_v\} + \mathbf{r}_{gv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_v} \mathbf{r}_{gT} \cdot \nabla \{T\} \right) \\ & = D_v \Delta \left(\mathbf{r}_{gv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_v} \mathbf{r}_{gT} \cdot \nabla \{T\} \right) \\ & \quad - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=p,c} \int_{S_{gi}} D_v \nabla \left(\mathbf{r}_{gv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_v} \mathbf{r}_{gT} \cdot \nabla \{T\} \right) \cdot \mathbf{n}_{gi} dS \end{aligned} \quad (\text{III.331})$$

En négligeant les dérivées du second ordre des termes macroscopiques on a :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}_g \cdot \nabla \mathbf{r}_{gv}) \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_v} (\mathbf{v}_g \cdot \nabla \mathbf{r}_{gT}) \cdot \nabla \{T\} + \widetilde{\mathbf{v}}_g \cdot \nabla \{\rho_v\} \\ & = D_v \Delta \mathbf{r}_{gv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + D_{cT}^* \Delta \mathbf{r}_{gT} \cdot \nabla \{T\} \\ & \quad - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} D_v \left(\sum_{i=p,c} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{r}_{gv} dS \right) \cdot \nabla \{\rho_v\} \\ & \quad - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} D_{cT}^* \left(\sum_{i=p,c} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{r}_{gT} dS \right) \cdot \nabla \{T\} \end{aligned} \quad (\text{III.332})$$

On regroupe les deux problèmes :

Selon $\nabla \{\rho_v\}$

$$\mathbf{v}_g \cdot \nabla \mathbf{r}_{gv} + \widetilde{\mathbf{v}}_g = D_v \Delta \mathbf{r}_{gv} - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} \sum_{i=p,c} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla (\mathbf{r}_{gv}) dS \quad (\text{III.333})$$

Et selon $\nabla \{T\}$

$$\mathbf{v}_g \cdot \nabla \mathbf{r}_{gT} = D_v \Delta \mathbf{r}_{gT} - \frac{\epsilon_g^{-1}}{V} D_v \sum_{i=p,c} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla \mathbf{r}_{gT} dS \quad (\text{III.334})$$

III.8.5.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées à ces problèmes de fermeture sont directement déduites des conditions aux limites établies pour les déviations, en remplaçant celles-ci par leurs expressions en fonction des variables de fermeture.

❖ Interface chanvre / polymère

Continuité de la température :

$$\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} = \mathbf{s}_{pT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_p} \mathbf{s}_{pv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.335})$$

Ce qui donne les trois conditions suivantes :

Selon $\nabla\{T\}$

$$\mathbf{s}_{cT} = \mathbf{s}_{pT} \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.336})$$

Selon $\nabla\{\rho_v\}$

$$\frac{1}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} = \frac{1}{\lambda_p} \mathbf{s}_{pv} \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.337})$$

Selon $\frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t}$

$$s_{cvt} = 0 \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.338})$$

Conservation du flux de chaleur :

$$\begin{aligned} & \mathbf{n}_{cp} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \left(\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \right) \\ & - \mathbf{n}_{cp} \cdot \lambda_p \nabla \left(\mathbf{s}_{pT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_p} \mathbf{s}_{pv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \right) \\ & = \mathbf{n}_{cp} \cdot \left(\lambda_p \mathbf{I} - \{\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}\}^c \right) \cdot \nabla\{T\} - \mathbf{n}_{cp} \cdot \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \cdot \nabla\{T\} \quad \text{sur } S_{cp} \end{aligned} \quad (\text{III.339})$$

On obtient en regroupant selon $\nabla\{T\}$:

$$\mathbf{n}_{cp} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} - \mathbf{n}_{cp} \cdot \lambda_p \nabla \mathbf{s}_{pT} = \mathbf{n}_{cp} \cdot \left(\lambda_p \mathbf{I} - \{\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}\}^c \right) \cdot \nabla\{T\} - \mathbf{n}_{cp} \cdot \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{cT}^{eff} \cdot \nabla\{T\} \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.340})$$

Selon $\nabla\{\rho_v\}$:

$$\mathbf{n}_{cp} \cdot \frac{1}{\lambda_{cT}^*} \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} = \mathbf{n}_{cp} \cdot \nabla \mathbf{s}_{pv} \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.341})$$

Et selon $\frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t}$:

$$\mathbf{n}_{cp} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} = 0 \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.342})$$

Condition d'imperméabilité :

$$\nabla \left(\mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla\{T\} + r_{cv} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n}_{cp} = -\nabla\{\rho_v\} \cdot \mathbf{n}_{cp} \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.343})$$

Ce qui permet d'écrire selon $\nabla\{T\}$

$$\nabla \mathbf{r}_{cT} \cdot \mathbf{n}_{cp} = 0 \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.344})$$

Selon $\nabla\{\rho_v\}$

$$\nabla \mathbf{r}_{cv} \cdot \mathbf{n}_{cp} = -\mathbf{n}_{cp} \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.345})$$

Et selon $\frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t}$

$$\mathbf{n}_{cp} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} = 0 \quad \text{sur } S_{cp} \quad (\text{III.346})$$

❖ Interface chanvre / air humide

Continuité de la température :

$$\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} = \mathbf{s}_{gT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_g^*} \mathbf{s}_{gv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \quad \text{sur } S_{cg} \quad (\text{III.347})$$

On obtient les conditions selon $\nabla\{T\}$:

$$\mathbf{s}_{cT} = \mathbf{s}_{gT} \quad \text{sur } S_{cg} \quad (\text{III.348})$$

Selon $\nabla\{\rho_v\}$

$$\frac{1}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} = \frac{1}{\lambda_g} \mathbf{s}_{gv} \quad \text{sur } S_{cg} \quad (\text{III.349})$$

Selon $\frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t}$

$$s_{cv} = 0 \quad \text{sur } S_{cg} \quad (\text{III.350})$$

On rappelle que l'on a négligé le transfert de chaleur par convection. La conservation du flux de chaleur s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \left(\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \right) \\ & - \mathbf{n}_{cg} \cdot \lambda_g \nabla \left(\mathbf{s}_{gT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_g} \mathbf{s}_{gv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \right) \\ & + \mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \left(\mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla\{T\} + r_{cv} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \right) \\ & = \mathbf{n}_{cg} \cdot (\lambda_g \mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}) \cdot \nabla\{T\} - \mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla\{\rho_v\} \quad \text{sur } S_{cg} \end{aligned} \quad (\text{III.351})$$

Selon $\nabla\{T\}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} - \mathbf{n}_{cg} \cdot \lambda_{pg} \nabla \mathbf{s}_{gT} + \mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \left(\frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \right) \\ & = \mathbf{n}_{cg} \cdot (\lambda_g \mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}) \quad \text{sur } S_{cg} \end{aligned} \quad (\text{III.352})$$

Selon $\nabla\{\rho_v\}$

$$\frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} - \lambda_{cv}^* \mathbf{n}_{cg} \cdot \nabla \mathbf{s}_{gv} + \mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} = -\mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \quad \text{sur } S_{cg} \quad (\text{III.353})$$

Selon $\frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t}$

$$\mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla s_{cvt} = -\mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla r_{cv} \quad \text{sur } S_{cg} \quad (\text{III.354})$$

Conservation du flux de vapeur :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \left(\mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + r_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) + \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff} \\
 & \quad \cdot \nabla \left(\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) - \mathbf{n}_{cg} \\
 & \quad \cdot D_v \nabla \left(\mathbf{r}_{gv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_v^*} \mathbf{r}_{gT} \cdot \nabla \{T\} \right) \\
 & = \underbrace{\mathbf{n}_{cg} \cdot (D_v \mathbf{I} - \mathbf{D}_{cv}^{eff}) \cdot \nabla \{\rho_v\}}_{source} + \underbrace{\mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \{T\}}_{source} \text{ sur } S_{cg}
 \end{aligned} \tag{III.355}$$

Selon $\nabla \{T\}$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \left(\frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \right) + \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla (\mathbf{s}_{cT}) - \mathbf{n}_{cg} \cdot D_{cT}^* \nabla (\mathbf{r}_{gT}) \\
 & = \underbrace{\mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff}}_{source} \text{ sur } S_{cg}
 \end{aligned} \tag{III.356}$$

Selon $\nabla \{\rho_v\}$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla (\mathbf{r}_{cv}) + \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \left(\frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \right) - \mathbf{n}_{cg} \cdot D_v \nabla (\mathbf{r}_{gv}) \\
 & = \underbrace{\mathbf{n}_{cg} \cdot (D_v \mathbf{I} - \mathbf{D}_{cv}^{eff})}_{source} \text{ sur } S_{cg}
 \end{aligned} \tag{III.357}$$

Selon $\frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t}$

$$\mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla (\mathbf{r}_{cv}) + \mathbf{n}_{cg} \cdot \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla (\mathbf{s}_{cv}) = 0 \quad \text{sur } S_{cg} \tag{III.358}$$

❖ *Interface air humide / polymère :*

Continuité de la température :

$$\mathbf{s}_{gT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_g} \mathbf{s}_{gv} \cdot \nabla \{\rho_v\} = \mathbf{s}_{pT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_p} \mathbf{s}_{pv} \cdot \nabla \{\rho_v\} \quad \text{sur } S_{pg} \tag{III.359}$$

Selon $\nabla\{T\}$

$$\mathbf{s}_{gT} = \mathbf{s}_{pT} \quad \text{sur } S_{pg} \quad (\text{III.360})$$

Selon $\nabla\{\rho_v\}$

$$\frac{1}{\lambda_g} \mathbf{s}_{gv} = \frac{1}{\lambda_p} \mathbf{s}_{pv} \quad \text{sur } S_{pg} \quad (\text{III.361})$$

Conservation du flux de chaleur :

$$\begin{aligned} \lambda_g \nabla \left(\mathbf{s}_{gT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_g} \mathbf{s}_{gv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \right) \cdot \mathbf{n}_{pg} - \lambda_p \nabla \left(\mathbf{s}_{pT} \cdot \nabla\{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_p} \mathbf{s}_{pv} \cdot \nabla\{\rho_v\} \right) \\ \cdot \mathbf{n}_{pg} = \underbrace{(\lambda_p - \lambda_g) \nabla\{T\} \cdot \mathbf{n}_{pg}}_{source} \quad \text{sur } S_{pg} \end{aligned} \quad (\text{III.362})$$

Selon $\nabla\{T\}$

$$\lambda_g \nabla(\mathbf{s}_{gT}) \cdot \mathbf{n}_{pg} - \lambda_p \nabla(\mathbf{s}_{pT}) \cdot \mathbf{n}_{pg} = \underbrace{(\lambda_p - \lambda_g) \cdot \mathbf{n}_{pg}}_{source} \quad \text{sur } S_{pg} \quad (\text{III.363})$$

Selon $\nabla\{\rho_v\}$

$$\nabla(\mathbf{s}_{gv}) \cdot \mathbf{n}_{pg} - \nabla(\mathbf{s}_{pv}) \cdot \mathbf{n}_{pg} = 0 \quad \text{sur } S_{pg} \quad (\text{III.364})$$

Conditions d'imperméabilité pour l'air humide :

$$\rho_g \tilde{\mathbf{v}}_g \cdot \mathbf{n}_{pg} = - \underbrace{\rho_g \{\mathbf{v}_g\}^g \cdot \mathbf{n}_{pg}}_{source} \quad \text{sur } S_{pg} \quad (\text{III.365})$$

Et pour la vapeur :

$$\mathbf{n}_{gp} \cdot D_v \nabla \left(\mathbf{r}_{gv} \cdot \nabla\{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_v} \mathbf{r}_{gT} \cdot \nabla\{T\} \right) = \underbrace{-\mathbf{n}_{gp} \cdot D_v \nabla\{\rho_v\}}_{source} \quad \text{sur } S_{pg} \quad (\text{III.366})$$

Selon $\nabla\{T\}$

$$\mathbf{n}_{gp} \cdot D_{cT}^* \nabla(\mathbf{r}_{gT}) = 0 \quad \text{sur } S_{pg} \quad (\text{III.367})$$

Selon $\nabla\{\rho_v\}$

$$\mathbf{n}_{gp} \cdot D_v \nabla(\mathbf{r}_{gv}) = \underbrace{-\mathbf{n}_{gp} \cdot D_v}_{source} \text{ sur } S_{pg} \quad (\text{III.368})$$

III.9 EQUATIONS FERMEES A L'ECHELLE DU MATERIAU

L'introduction des expressions des déviations dans les équations non fermées permet d'obtenir :

III.9.1 Conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} & \{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \{\langle \dot{m}_{cond} \Delta h_{cond} \rangle\} + \{\langle \dot{m}_{sorp} \Delta h_{sorp} \rangle\} = \\ & \nabla \cdot \left[\left(\lambda_g \epsilon_g \mathbf{I} + \lambda_p \epsilon_p \mathbf{I} + \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \epsilon_c \right) \cdot \nabla \{T\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda_g}{V} \sum_{i=p,c} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \left(\mathbf{s}_{gT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_g} \mathbf{s}_{gv} \cdot \nabla \{\rho_v\} \right) dS \right. \\ & \quad \left. + \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \left(\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \left(\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda_p}{V} \sum_{i=g,c} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} \left(\mathbf{s}_{pT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_p} \mathbf{s}_{pv} \cdot \nabla \{\rho_v\} \right) dS \right. \\ & \quad \left. + \{\lambda_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{\rho_v\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \left(\mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + r_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \left(\mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + r_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.369})$$

En regroupant les termes en $\nabla\{\rho_v\}$ et $\nabla\{T\} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}
 & \{\rho C_p\} \frac{\partial\{T\}}{\partial t} + \{\langle \dot{m}_{cond} \rangle \Delta h_{cond}\} + \{\langle \dot{m}_{sorp} \rangle \Delta h_{sorp}\} = \\
 & \nabla \cdot \left[\lambda_g \left(\epsilon_g \mathbf{I} + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{s}_{gT} dS \right) + \lambda_p \left(\epsilon_p \mathbf{I} + \frac{1}{V} \sum_{i=c,g} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} \otimes \mathbf{s}_{pT} dS \right) \right. \\
 & + \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\mathbf{I} \epsilon_c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{s}_{cT} dS \right) + \{\tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT}\} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\tilde{\lambda}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT}\} \\
 & + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\lambda_{cv}^{eff}\}^c \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{r}_{cT} dS \left. \right] \cdot \nabla\{T\} \\
 & + \left[\frac{\lambda_{cv}^*}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{s}_{gv} dS + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{s}_{cv} dS \right. \\
 & + \frac{\lambda_{cv}^*}{V} \sum_{i=g,c} \int_{S_{pi}} \mathbf{n}_{pi} \otimes \mathbf{s}_{pv} dS \\
 & + \{\lambda_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \mathbf{I} + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{r}_{cv} dS \right) \\
 & + \left\{ \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv} \right\} + \{\tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv}\} \left. \right] \cdot \nabla\{\rho_v\} \\
 & + \left[\{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} s_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS \right) + \{\lambda_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} r_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right. \\
 & + \{\tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla s_{cv}\} + \{\tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla r_{cv}\} \left. \right] \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \quad (III.370)
 \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{V} \sum_{i=l,s} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{s}_{gT} dS = \{\nabla \mathbf{s}_{gT}\} - \nabla \underbrace{\{\mathbf{s}_{gT}\}}_{=0}$, on peut écrire par exemple :

$$\begin{aligned} & \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\mathbf{I} \epsilon_c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{s}_{cT} dS \right) + \{\tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT}\} \\ &= \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \epsilon_c + \left\{ \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \cdot \nabla \mathbf{s}_{gT} + \tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right\} \\ &= \left\{ \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c + \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right\} = \epsilon_c \left\{ \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c + \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right\}^c \end{aligned} \quad (III.371)$$

En répétant cette procédure, on peut simplifier l'équation précédente :

$$\begin{aligned} & \{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \{\langle \dot{m}_{cond} \rangle \Delta h_{cond}\} + \{\langle \dot{m}_{sorp} \rangle \Delta h_{sorp}\} = \\ & \nabla \cdot \left[\left[\epsilon_g \lambda_g \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{s}_{gT}\}^g + \epsilon_p \lambda_p \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{s}_{pT}\}^p + \epsilon_c \left\{ \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c + \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right\}^c \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \epsilon_c \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT}\}^c \right] \cdot \nabla \{T\} \right. \\ & \quad \left. + \left[\epsilon_g \lambda_{cv}^* \{\nabla \mathbf{s}_{gv}\}^g + \epsilon_c \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \{\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv}\}^c + \epsilon_p \lambda_{cv}^* \{\nabla \mathbf{s}_{pv}\}^g \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \epsilon_c \left\{ \{\lambda_{cv}^{eff}\}^c + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} \right\}^c \right] \cdot \nabla \{\rho_v\} \right. \\ & \quad \left. + \left[\epsilon_c \{\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv}\}^c + \epsilon_c \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv}\}^c \right] \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (III.372)$$

On note :

$$\mathbf{\Lambda}_{gT} = \epsilon_g \lambda_g \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{s}_{gT}\}^g \quad (III.373)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{pT} = \epsilon_p \lambda_p \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{s}_{pT}\}^p \quad (III.374)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{cT} = \epsilon_c \left\{ \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c + \lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right\}^c + \epsilon_c \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT}\}^c \quad (III.375)$$

Ce qui permet de définir le tenseur de conductivité effective $\mathbf{\Lambda}_T^{eff}$:

$$\mathbf{\Lambda}_T^{eff} = \mathbf{\Lambda}_{gT} + \mathbf{\Lambda}_{pT} + \mathbf{\Lambda}_{cT} \quad (III.376)$$

On définit de manière analogue les tenseurs :

$$\Lambda_{gv} = \epsilon_g \lambda_{cv}^* \{\nabla \mathbf{s}_{gv}\}^g \quad (\text{III.377})$$

$$\Lambda_{pv} = \epsilon_p \lambda_{cv}^* \{\nabla \mathbf{s}_{pv}\}^g \quad (\text{III.378})$$

$$\Lambda_{cv} = \epsilon_c \left\{ \{\lambda_{cv}^{eff}\}^c + \lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} \right\}^c + \epsilon_c \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \{\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv}\}^c \quad (\text{III.379})$$

Et on écrit le tenseur effectif Λ_v^{eff} pilotant le transfert de chaleur sous l'action de gradient de vapeur :

$$\Lambda_v^{eff} = \Lambda_{gv} + \Lambda_{pv} + \Lambda_{cv} \quad (\text{III.380})$$

Enfin, on définit le tenseur Λ_{ct}^{eff} comme :

$$\Lambda_{ct}^{eff} = \epsilon_c \{\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv}\}^c + \epsilon_c \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\lambda_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv}\}^c \quad (\text{III.381})$$

On obtient finalement une équation macroscopique de forme générale :

$$\begin{aligned} \{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \{\dot{m}_{cond}\} \Delta h_{cond} + \{\dot{m}_{sorp}\} \Delta h_{sorp} \\ = \nabla \cdot \left[\Lambda_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} + \Lambda_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \Lambda_t^{eff} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.382})$$

Afin de développer les termes liées au transfert de chaleur par changement de phase et sorption / désorption, on fait comme précédemment l'hypothèse que les enthalpies sont constantes au sein du VER.

On exprime le taux moyen de condensation comme :

$$\begin{aligned} \{\dot{m}_{cond}\} = \{\widetilde{\mathbf{m}}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \widetilde{\rho}_{vc}\} + \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\} \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{\rho_v\} + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{\rho}_{vc} \mathbf{n}_{ci} dS \right) \\ + \{\widetilde{\mathbf{m}}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \tilde{T}_c\} + \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\} \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{T\} + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \tilde{T}_c \mathbf{n}_{ci} dS \right) \\ + \{\widetilde{m}_v^{cond} \frac{\partial \tilde{\rho}_{vc}}{\partial t}\} + \{m_v^{cond}\} \epsilon_c \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{III.383})$$

Dans le cas où les moyennes des produits de déviations peuvent être négligées (ce qui pourra être vérifié numériquement en résolvant les problèmes de fermeture), on a :

$$\begin{aligned}
 \{\dot{m}_{cond}\} = & \left[\{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\} \cdot \left(\mathbf{I}\varepsilon_c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \left(\mathbf{r}_{cv} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \right) dS \right) \right] \cdot \nabla\{\rho_v\} \\
 & + \left[\{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\} \cdot \left(\mathbf{I}\varepsilon_c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \left(\mathbf{s}_{cT} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \right) dS \right) \right] \cdot \nabla\{T\} \\
 & + \left(\{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\} \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} r_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS + \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\} \cdot \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} s_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS \right. \\
 & \left. + \varepsilon_c \{m_v^{cond}\} \right) \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \quad (III.384)
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 \{\dot{m}_{cond}\} = & \left[\varepsilon_c \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\} \cdot \left\{ \mathbf{I} + \nabla \mathbf{r}_{cv} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \nabla \mathbf{s}_{cv} \right\}^c \right] \cdot \nabla\{\rho_v\} \\
 & + \left[\varepsilon_c \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\} \cdot \left\{ \left(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{s}_{cT} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \nabla \mathbf{r}_{cT} \right) \right\}^c \right] \cdot \nabla\{T\} \\
 & + \varepsilon_c \left\{ \{\mathbf{m}_{gv}^{cond}\} \cdot \nabla r_{cv} + \{\mathbf{m}_{gT}^{cond}\} \cdot \nabla s_{cv} + \{m_v^{cond}\} \right\}^c \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \quad (III.385)
 \end{aligned}$$

Où sous une forme plus compacte :

$$\{\dot{m}_{cond}\} = \mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla\{\rho_v\} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla\{T\} + m_v^{cond} \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} \quad (III.386)$$

Le taux de sorption s'exprime de manière plus simple, en supposant K constant :

$$\{\dot{m}_{sorp}\} = \varepsilon_c K \{\mathcal{A}_{gs}\}^c \frac{\partial\{\rho_v\}}{\partial t} + K \left\{ \widetilde{\mathcal{A}}_{gs} \frac{\partial \widetilde{\rho}_{vc}}{\partial t} \right\} \quad (III.387)$$

Si on néglige $\{\widetilde{\mathcal{A}}_{gs} \frac{\partial \rho_{vc}}{\partial t}\}$, on obtient :

$$\{\dot{m}_{sorp}\} = \varepsilon_c K \{\mathcal{A}_{gs}\}^c \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \quad (\text{III.388})$$

L'équation de conservation de l'énergie se met alors sous la forme développée :

$$\begin{aligned} \{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \left(\mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \{T\} + m_v^{cond} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) \Delta h_{cond} \\ + \varepsilon_c K \{\mathcal{A}_{gs}\}^c \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \Delta h_{sorp} \\ = \nabla \cdot \left[\mathbf{\Lambda}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} + \mathbf{\Lambda}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \mathbf{\Lambda}_t^{eff} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.389})$$

Il est très probable que $\mathbf{\Lambda}_t^{eff}$ soit du même ordre voir même très inférieur à $m_v^{cond} \Delta h_{cond}$ ou $\varepsilon_c K \{\mathcal{A}_{gs}\}^c \Delta h_{sorp}$, notamment du fait des valeurs importantes des enthalpies de condensation / évaporation et de sorption / désorption ainsi que de la similitude entre $\mathbf{\Lambda}_t^{eff}$ et m_v^{cond} . Dans ce cas les ordres de grandeurs suivants nous indiquent que l'on peut négliger ce terme.

$$\{\dot{m}_{sorp}\} \Delta h_{sorp} = \mathcal{O} \left(\varepsilon_c K \{\mathcal{A}_{gs}\}^c \frac{\{\rho_v\}}{t} \right) \quad (\text{III.390})$$

$$m_v^{cond} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} = \mathcal{O} \left(m_v^{cond} \frac{\{\rho_v\}}{t} \right) \quad (\text{III.391})$$

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{\Lambda}_t^{eff} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right] = \mathcal{O} \left(\mathbf{\Lambda}_t^{eff} \frac{\{\rho_v\}}{tL} \right) \quad (\text{III.392})$$

Finalement on obtient l'équation macroscopique de conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \{\langle \dot{m}_{cond} \rangle\} \Delta h_{cond} + \{\langle \dot{m}_{sorp} \rangle\} \Delta h_{sorp} \\ = \nabla \cdot \left[\mathbf{\Lambda}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} + \mathbf{\Lambda}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.393})$$

La forme de l'équation est très classique, l'intérêt de notre approche étant d'avoir défini de manière précise l'ensemble des paramètres effectifs, qu'il est possible de calculer lorsque l'on connaît la microstructure, ainsi que les hypothèses qui permettent d'obtenir cette formulation.

III.9.2 Conservation de la masse

En remplaçant les déviations par leurs expressions en fonction des variables de fermeture, on a :

$$\begin{aligned}
 & (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c \epsilon_c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\dot{m}_l\} + \nabla \cdot (\{\rho_v\} \{\mathbf{v}_g\}) = \\
 & \nabla \cdot \left(\{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{\rho_v\} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \left(\mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + r_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\
 & \quad + \nabla \cdot \left\{ \widetilde{\mathbf{D}_{cv}^{eff}} \cdot \nabla \left(\mathbf{r}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \mathbf{r}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + r_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) \right\} \\
 & + \nabla \cdot \left(\{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\epsilon_c \nabla \{T\}^c \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \left(\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n}_{ci} dS \right) \right) \\
 & \quad + \nabla \cdot \left\{ \widetilde{\mathbf{D}_{cT}^{eff}} \cdot \nabla \left(\mathbf{s}_{cT} \cdot \nabla \{T\} + \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + s_{cv} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right) \right\} \\
 & + \nabla \cdot \left(\{\rho_g\}^g D_v \left(\epsilon_g \nabla \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \frac{1}{\{\rho_g\}^g} \left(\mathbf{r}_{gv} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \frac{D_{cT}^*}{D_v} \mathbf{r}_{gT} \cdot \nabla \{T\} \right) dS \right) \right)
 \end{aligned} \tag{III.394}$$

En réarrangeant :

$$\begin{aligned}
 & (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\dot{m}_l\} + \nabla \cdot (\{\rho_v\} \{\mathbf{v}_g\}) = \\
 & \nabla \cdot \left[\left[\{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\mathbf{I}\epsilon_c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{r}_{cv} dS \right) + \epsilon_c \left\{ \widetilde{\mathbf{D}_{cv}^{eff}} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} \right\}^c + \{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c \right. \right. \\
 & \quad \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{si}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} dS \right) + \epsilon_c \left\{ \widetilde{\mathbf{D}_{cT}^{eff}} \cdot \nabla \left(\frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \mathbf{s}_{cv} \right) \right\}^c \\
 & \quad \left. + D_v \left(\mathbf{I}\epsilon_g + \frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{r}_{gv} dS \right) \right] \cdot \nabla \{\rho_v\} - D_v \epsilon_g \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \nabla \{\rho_g\}^g \\
 & \quad + \left[\frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{si}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{r}_{cT} dS \right) + \epsilon_c \left\{ \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \widetilde{\mathbf{D}_{cv}^{eff}} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT} \right\}^c \right. \\
 & \quad \left. + \nabla \cdot \left(\{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c \cdot \left(\mathbf{I}\epsilon_c + \frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} \mathbf{n}_{ci} \otimes \mathbf{s}_{cT} dS \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \epsilon_c \left\{ \widetilde{\mathbf{D}_{cT}^{eff}} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right\}^c + D_{cT}^* \left(\frac{1}{V} \sum_{i=c,p} \int_{S_{gi}} \mathbf{n}_{gi} \otimes \mathbf{r}_{gT} dS \right) \right] \cdot \nabla \{T\} \\
 & \quad + \left[\{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} r_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS \right) + \left\{ \widetilde{\mathbf{D}_{cv}^{eff}} \cdot \nabla r_{cv} \right\} + \{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left(\frac{1}{V} \sum_{i=p,g} \int_{S_{ci}} s_{cv} \mathbf{n}_{ci} dS \right) + \left\{ \widetilde{\mathbf{D}_{cT}^{eff}} \cdot \nabla s_{cv} \right\} \right] \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \Bigg] \quad (III.395)
 \end{aligned}$$

En transformant les intégrales surfaciques en intégrales volumiques comme précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\dot{m}_l\} + \nabla \cdot (\{\rho_v\} \{\mathbf{v}_g\}) = \\
 & \nabla \cdot \left[\left[\epsilon_c \cdot \left\{ \{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c + \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} \right\}^c + \epsilon_c \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \{\mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv}\}^c \right. \right. \\
 & + \epsilon_g D_v \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{r}_{gv}\}^g \cdot \nabla \{\rho_v\} - D_v \epsilon_g \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \cdot \nabla \{\rho_g\}^g \\
 & + \left[\epsilon_c \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT}\}^c + \nabla \cdot (\epsilon_c \{\{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT}\}^c) \right. \\
 & \left. \left. + D_{cT}^* \epsilon_g \{\nabla \mathbf{r}_{gT}\}^g \right] \cdot \nabla \{T\} + \right. \\
 & \left. \right] \quad (III.396)
 \end{aligned}$$

On pose :

$$\mathbf{D}_{cv} = \epsilon_c \left\{ \{\mathbf{D}_{cv}^{eff}\}^c + \mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv} \right\}^c + \epsilon_c \frac{\lambda_{cv}^*}{\lambda_{cT}^*} \cdot \{\mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv}\}^c \quad (III.397)$$

$$\mathbf{D}_{gv} = \epsilon_g D_v \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{r}_{gv}\}^g \quad (III.398)$$

Et on définit le tenseur effectif de diffusivité :

$$\mathbf{D}_v^{eff} = \mathbf{D}_{cv} + \mathbf{D}_{gv} \quad (III.399)$$

On procède de même concernant les termes qui décrivent le transfert de vapeur sous l'action du gradient de température :

$$\mathbf{D}_{cT} = \epsilon_c \frac{D_{cT}^*}{D_{cv}^*} \{\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cT}\}^c + \epsilon_c \left\{ \{\mathbf{D}_{cT}^{eff}\}^c + \mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} \right\}^c \quad (III.400)$$

$$\mathbf{D}_{gT} = D_{cT}^* \epsilon_g \{\nabla \mathbf{r}_{gT}\}^g \quad (III.401)$$

On définit le tenseur effectif :

$$\mathbf{D}_T^{eff} = \mathbf{D}_{cT} + \mathbf{D}_{gT} \quad (III.402)$$

Finalement on pose :

$$\mathbf{D}_{ct}^{eff} = \{\mathbf{D}_{cv}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{r}_{cv}\}^c + \{\mathbf{D}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cv}\}^c \quad (III.403)$$

On obtient alors une forme très compacte de l'équation macroscopique de conservation de la masse de vapeur :

$$\begin{aligned} & (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\dot{m}_l\} + \nabla \cdot (\{\rho_v\} \{\mathbf{v}_g\}) = \\ & \nabla \cdot \left[\mathcal{D}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \mathcal{D}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} + \mathcal{D}_{ct}^{eff} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} - D_v \epsilon_g \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \cdot \nabla \{\rho_g\}^g \right] \end{aligned} \quad (III.404)$$

Le terme $\nabla \cdot \left(\frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right)$ peut être négligeable devant $\frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t}$, en effet on a :

$$\frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} = \mathcal{O} \left(\frac{\{\rho_v\}}{t} \right) \quad (III.405)$$

$$\nabla \cdot \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} = \mathcal{O} \left(\frac{\{\rho_v\}}{Lt} \right) \quad (III.406)$$

Et $\mathcal{D}_{ct}^{eff} < 1$ voir, plus probablement, $\mathcal{D}_{ct}^{eff} \ll 1$.

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} & (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\dot{m}_l\} + \nabla \cdot (\{\rho_v\} \{\mathbf{v}_g\}) = \\ & \nabla \cdot \left[\mathcal{D}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \mathcal{D}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} - D_v \epsilon_g \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \cdot \nabla \{\rho_g\}^g \right] \end{aligned} \quad (III.407)$$

Sous certaines conditions, la vitesse macroscopique peut être représentée par la loi de Darcy :

$$\{\mathbf{v}_g\} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu_g} \cdot \nabla \{p_g\}^g \quad (III.408)$$

Ce qui permet de mettre l'équation de conservation de la masse de vapeur sous la forme :

$$\begin{aligned} & (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\dot{m}_l\} - \nabla \cdot \left(\{\rho_v\} \frac{\mathbf{K}}{\mu_g} \cdot \nabla \{p_g\}^g \right) = \\ & \nabla \cdot \left[\mathcal{D}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \mathcal{D}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} - D_v \epsilon_g \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \cdot \nabla \{\rho_g\}^g \right] \end{aligned} \quad (III.409)$$

Le terme $\frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \nabla \{\rho_g\}^g$ est négligeable lorsque $\frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \ll 1$, ce qui est généralement le cas dans le type d'applications envisagées. La pression de vapeur saturante est de l'ordre de $10^3 Pa$ dans les problèmes traités, et donc $\frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g}$ est au maximum de l'ordre de 10^{-2} . De

plus le gradient de pression totale reste généralement très faible (surtout en isolation intérieure).

En ce qui concerne l'importance du terme d'advection par rapport à la diffusion, on peut estimer la vitesse par la loi de Darcy avec une perméabilité de 10^{-9}m^2 , calculée sur les images de notre isolant (cf section IV.7). La différence de pression totale entre les deux faces d'un isolant est généralement assez faible, surtout en isolation intérieure, mais est susceptible de varier largement en fonction de paramètres environnementaux (vent, variation de la pression barométrique, tirage thermique, ventilation mécanique contrôlée etc.). Des différences de pression entre l'intérieur et l'extérieur d'un mur peuvent atteindre plusieurs dizaines de Pa, voire plus. Il reste néanmoins difficile d'évaluer la différence de pression au sein de l'isolant. En prenant une valeur de $\Delta P_g = 10 \text{ Pa}$ et une épaisseur d'isolant de 12 cm, on obtient une vitesse du gaz d'environ $\{v_g\} \simeq 4,5 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le Peclet massique vaut alors environ 27 pour un coefficient de diffusion effectif de $2 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ obtenu par résolution du problème de fermeture sur les images 3D de la laine de chanvre (cf section IV.6.2.4). L'advection est donc dans ce cas le phénomène prépondérant. Il faudrait des différences de pression inférieures à 1 Pa pour que le transport de vapeur puisse être considéré purement diffusif.

III.10 CONCLUSION

Lors de ce chapitre, nous avons développé un modèle de transferts couplés de chaleur et de masse avec prise en compte de la sorption et du changement de phase au travers de deux changements d'échelles successifs. Si les équations de conservation à l'échelle macroscopique sont similaires dans la forme à celles que l'on peut trouver dans la littérature et qui ont été présenté dans le premier chapitre de cette thèse, on s'attachera ici à mettre en avant les spécificités ainsi que les avantages de notre approche.

Le modèle développé prend la forme générale suivante :

A l'échelle de la fibre homogénéisée :

$$\langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle \Delta h_{cond} \dot{m}_{cond} \rangle + \langle \Delta h_{sorp} \dot{m}_{sorp} \rangle = \nabla \cdot (\lambda_T^{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle + \lambda_v^{eff} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g) \quad (\text{III.410})$$

$$\epsilon_g \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} + \langle \dot{m}_{cond} \rangle + \langle \dot{m}_{sorp} \rangle = \nabla \cdot (\mathbf{D}_v^{eff} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle) \quad (\text{III.411})$$

Avec les taux de condensation et de sorption définis par :

$$\langle \dot{m}_{cond} \rangle = \mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \langle \rho_v \rangle^g + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \langle T \rangle + m_v^{cond} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \quad (\text{III.412})$$

$$\langle \dot{m}_{sorp} \rangle = K \mathcal{A}_{gs} \frac{\partial \langle \rho_v \rangle^g}{\partial t} \quad (\text{III.413})$$

Et les tenseurs effectifs λ_T^{eff} , λ_v^{eff} , \mathcal{D}_v^{eff} et \mathcal{D}_T^{eff} ainsi que les paramètres \mathbf{m}_{gv}^{cond} , \mathbf{m}_{gT}^{cond} et \mathbf{m}_v^{cond} qui peuvent être calculés en résolvant les problèmes de fermeture définis dans la section III.4.5.

Le modèle macroscopique prend une forme similaire :

$$\begin{aligned} \{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \{\langle \dot{m}_{cond} \rangle\} \Delta h_{cond} + \{\langle \dot{m}_{sorp} \rangle\} \Delta h_{sorp} \\ = \nabla \cdot [\mathbf{\Lambda}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} + \mathbf{\Lambda}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\}] \end{aligned} \quad (III.414)$$

$$\begin{aligned} (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\langle \dot{m}_{cond} \rangle\} + \{\langle \dot{m}_{sorp} \rangle\} - \nabla \cdot \left(\{\rho_v\} \frac{\mathbf{K}}{\mu_g} \cdot \nabla \{p_g\}^g \right) = \\ \nabla \cdot \left[\mathcal{D}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \mathcal{D}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} - D_v \epsilon_g \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \cdot \nabla \{\rho_g\}^g \right] \end{aligned} \quad (III.415)$$

Avec :

$$\{\dot{m}_{cond}\} = \mathbf{m}_{gv}^{cond} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \mathbf{m}_{gT}^{cond} \cdot \nabla \{T\} + \mathbf{m}_v^{cond} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \quad (III.416)$$

$$\{\dot{m}_{sorp}\} = \epsilon_c K \{\mathcal{A}_{gs}\}^c \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \quad (III.417)$$

Et les tenseurs effectifs $\mathbf{\Lambda}_T^{eff}$, $\mathbf{\Lambda}_v^{eff}$, \mathcal{D}_v^{eff} et \mathcal{D}_{ct}^{eff} ainsi que les paramètres \mathbf{m}_{gv}^{cond} , \mathbf{m}_{gT}^{cond} et \mathbf{m}_v^{cond} peuvent être calculés par résolution des problèmes de fermeture associés.

Un des intérêts principaux de l'approche par double changement d'échelle est d'obtenir les équations qui régissent les transferts couplés au sein des fibres. Cette distinction entre l'échelle à l'intérieur de la fibre et l'échelle du réseau de fibres où la fibre est considérée comme un milieu homogène n'apparaît en effet pas dans la littérature. Le modèle proposé ici permet d'obtenir les expressions des tenseurs effectifs dans les fibres, ce qui permettra d'estimer leurs ordres de grandeur en fonction de la teneur en eau de la fibre et de sa micro géométrie. On a par exemple pour le tenseur de conductivité effective l'expression :

$$\lambda_T^{eff} = \epsilon_s \langle \langle \lambda_s \rangle^s + \lambda_s \cdot \nabla \mathbf{b}_{sT} \rangle^s + \epsilon_g \lambda_g \langle \mathbf{I} + \nabla \mathbf{b}_{gT} \rangle^g + \epsilon_l \lambda_l \langle \mathbf{I} + \nabla \mathbf{b}_{lT} \rangle^l \quad (III.418)$$

Où on voit apparaître le rôle des fractions volumique de chaque phase et le rôle de la microstructure au travers des variables de fermeture.

Le modèle macroscopique tient quant à lui compte des variations des propriétés effectives au sein des fibres, au travers de variations possibles de la conductivité et de la diffusivité des fibres liées à leur orientation, à leur teneur en eau et à leur microstructure, ce qui n'est pas le cas des modèles existants présentés dans le premier chapitre de cette thèse.

D'autre part, un des points originaux est la détermination des expressions des taux de sorption et de changement de phases en fonction des variables macroscopiques. L'estimation de ces termes par la résolution des problèmes de fermeture associés permet une alternative à une approche de type identification à partir de mesures expérimentales, qui est très délicate compte tenu de la complexité du problème.

Enfin, nous avons développé l'ensemble des problèmes de fermeture couplés pour les deux changements d'échelle, étape fondamentale pour déterminer les différents paramètres effectifs qui apparaissent dans le modèle.

Les perspectives de ce travail sont tout d'abord l'intégration du transport d'eau liquide, principalement par capillarité au sein de ces milieux très poreux ainsi que de la condensation capillaire. Cependant, le transport d'eau libre au sein de ces matériaux très poreux n'est important que lorsque la teneur en eau devient elle-même importante ce qui ne correspond pas à des conditions de service normales, mais à des conditions où le sinistre est déjà avéré. Enfin, la prise en compte du gonflement-retrait des fibres pourrait également être envisagée (cf. Cáceres et al., 2007).

Chapitre IV.

CARACTERISATION DES PROPRIETES

THERMO-HYDRIQUES

IV.1 INTRODUCTION

Comme nous l'avons déjà évoqué auparavant, les fibres d'origine naturelle constituent un matériau de choix pour la fabrication d'isolants pour le bâtiment. Si leurs propriétés thermiques et hydriques ainsi que leur impact environnemental sont très intéressants, elles montrent cependant une grande variabilité morphologique (taille, forme, longueur, etc.) (John and Thomas, 2008) ainsi que de leurs propriétés physiques (Di Landro and Janszen, 2014; Dujardin, 2014).

Une première étape de caractérisation a été entamée dans le chapitre II de ce document en se focalisant sur l'aspect morphologique. Nous proposons dans ce chapitre de compléter cette caractérisation par des moyens expérimentaux et numériques, afin de déterminer des propriétés de transferts thermiques et hydriques, ainsi que les caractéristiques structurales de la laine de chanvre étudiée. Pour ce faire, différentes approches vont être présentées et comparées afin de déterminer correctement ces propriétés à l'échelle macroscopique et ainsi d'évaluer leurs performances thermo hydriques.

IV.2 CARACTERISATION MORPHOLOGIQUE

IV.2.1 Méthodes

IV.2.1.1 Masse volumique apparente

Pour déterminer la masse volumique apparente « à l'état sec », la méthode la plus simple consiste à peser de façon précise le matériau après l'avoir séché et d'en déterminer son volume soit par des mesures dimensionnelles (méthode peu précise) soit par une pesée hydrostatique avec une double pesée (dans l'air et dans un autre fluide, de l'échantillon paraffiné). Dans le cas de cette étude, la première méthode a été utilisée et on trouve une masse volumique apparente de $44,03 \text{ kg.m}^{-3}$.

IV.2.1.2 Masse volumique intrinsèque

Pour déterminer la masse volumique intrinsèque des fibres, plusieurs méthodes sont possibles.

- Une première méthode consiste à broyer très finement le matériau et à mesurer la masse volumique réelle de la poudre obtenue.
- Une seconde méthode consiste à utiliser un pycnomètre à liquides. Dans le cas de fibre, la porosité très importante (> 90 %) rend difficile, voire impossible, l'utilisation de cette méthode. En effet, l'immersion de la fibre dans un liquide peut modifier la structure (gonflement de la fibre).
- Une troisième technique consiste à utiliser un pycnomètre à hélium (Accupyc 1330). Le pycnomètre à hélium permet de déterminer la masse volumique d'un matériau à partir de la mesure très précise du volume d'un échantillon de masse connue. Il remplace avantageusement les pycnomètres à liquides en évitant tout gonflement du matériau étudié dans ces liquides et il permet donc une détermination plus précise de la masse volumique. C'est cette dernière méthode qui a été choisie.



Figure IV-1 : Pycnomètre à hélium ACCUPYC 1330.

Cette technique (Figure IV-2) permet de calculer le volume de l'échantillon en appliquant la loi de Mariotte :

$$V_{\text{échantillon}} = V_{\text{cellule}} - \frac{V_{\text{expansion}}}{\frac{P_{1g}}{P_{2g}} - 1} \quad (\text{IV.1})$$

avec P_{1g} , la pression lors du remplissage de la chambre contenant l'échantillon et P_{2g} , la pression après ouverture sur la deuxième chambre vide dite d'expansion.

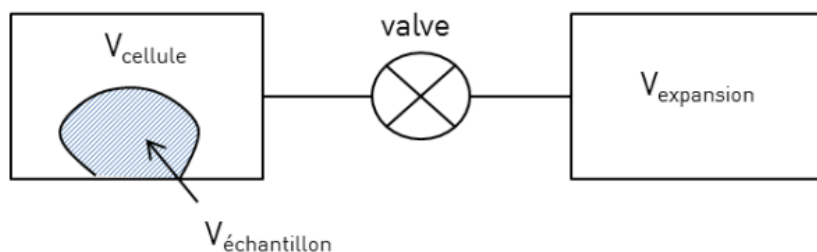


Figure IV-2 : Diagramme simplifié du pycnomètre.

À partir de la formule simple de la masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$, on peut en déduire les masses volumiques apparentes et intrinsèques. En divisant la masse de l'échantillon sur le volume de la cellule, on trouve la masse apparente et si on divise sur le volume calculé pour l'échantillon on trouve la masse volumique intrinsèque.

IV.2.2 Résultats expérimentaux

Les résultats des différentes expérimentations sont présentés dans le tableau suivant.

Les valeurs de la porosité et de la surface massique ont été obtenues par calcul (équations (I.4) et (I.9)) en prenant comme diamètre des fibres le résultat obtenu par analyse d'image par tomographie (la moyenne de 100 μm).

Caractéristiques	Résultats
Masse volumique apparente ρ^a	44,03 kg.m ⁻³
Masse volumique intrinsèque ρ^i	1517,7 kg.m ⁻³
Porosité ε	97,1 %
Surface volumique S_v	1200 m ⁻¹ (ou m ² .m ⁻³)
Surface massique S_m	26,36 m ² .g ⁻¹

Tableau IV-1 : Caractéristiques physiques de la laine de chanvre.

La masse volumique intrinsèque mesurée ici correspond à l'ordre de grandeur de la masse volumique des fibres végétales, qui est relativement constante pour les fibres ligno-cellulosiques (environ 1,53 kg.m⁻³ (J. Siau, 1984)).

La porosité mesurée par le pycnomètre est quant à elle bien supérieure à la porosité mesurée par analyse d'image, qui est de 90,5 % + 0,5 % environ de lumen de chènevotte. La différence observée est probablement liée à la résolution des images tomographiques qui ne permet pas de visualiser les lumens des fibres libériennes d'une part et qui ne permet qu'une estimation grossière de la part des lumens des chènevottes d'autre part. Enfin, le filtrage des images à 16 μ m favorise la préservation de la connectivité des fibres et a pour effet de légèrement surestimer le diamètre des fibres les plus fines, ce qui conduit logiquement à une sous-estimation de la porosité. Enfin, il est également possible que la laine de chanvre présente des variations spatiales de densité qui peuvent expliquer ces différences, puisque le volume des images est trop petit pour moyenner ces variations.

IV.3 ANALYSE THERMOGRAVIMETRIQUE

La technique de la thermogravimétrie (Wirth et al., 2014) repose sur la mesure de la variation de masse d'un échantillon en fonction de sa température. La méthode consiste à chauffer à vitesse constante un échantillon de la température ambiante à une température finale suffisamment élevée. L'échantillon subit alors des changements pouvant être d'ordre physique, chimique, structurel ou encore mécanique.

Les essais ont été réalisés sur un appareil de marque SETARAM, de type SETSYS Évolution 16/18, présenté sur la Figure IV-3. L'échantillon, pesant environ 28,8 mg, a été placé dans un creuset en alumine puis soumis à une montée en température de 20°C jusqu'à 1000°C, à une vitesse de 10°C/min, sous un flux d'argon de 20 ml/min.

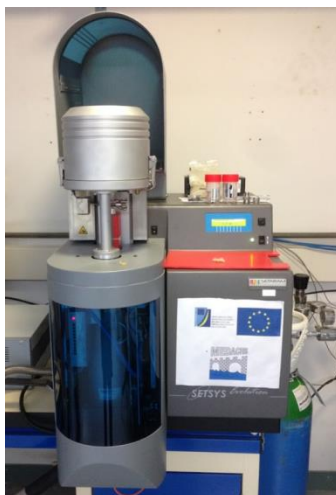


Figure IV-3 : ATG (SETARAM).

La courbe d'ATG nous permet d'identifier les phénomènes de perte de masse tandis que sa dérivée première, DTG, permet l'identification des pics associés aux décompositions des échantillons.

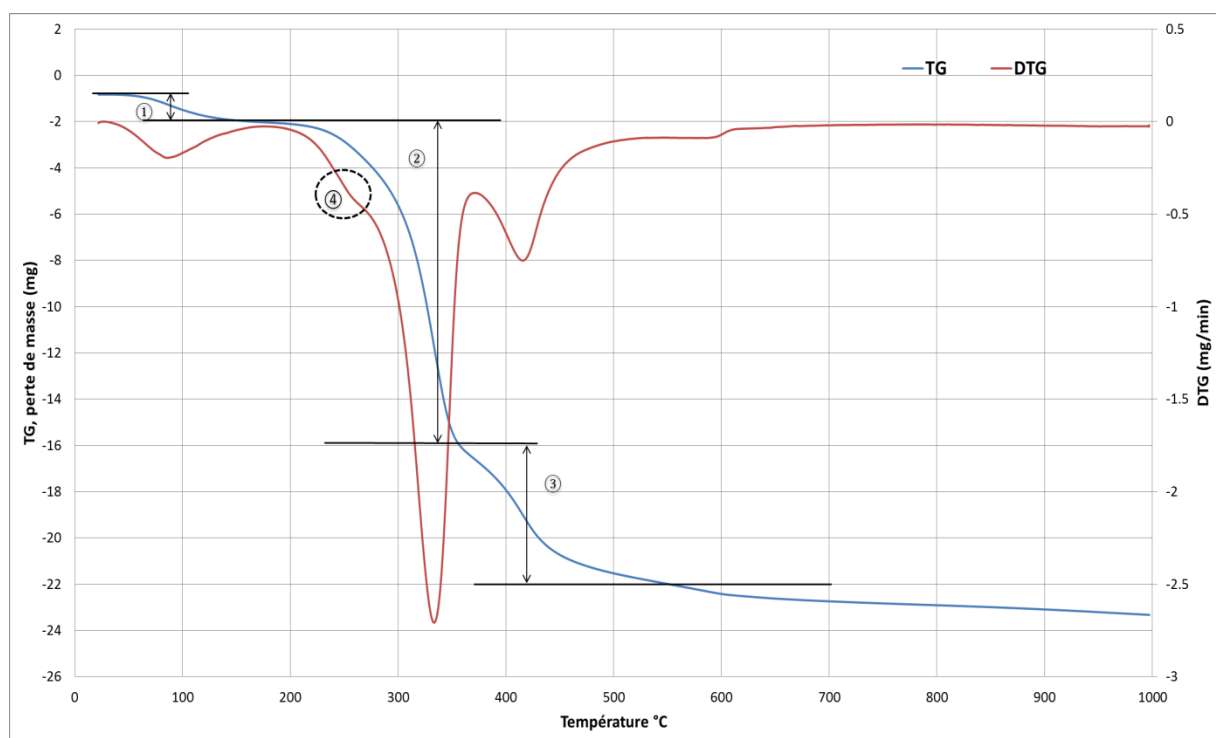


Figure IV-4 : Analyse thermogravimétrique de la laine de chanvre - (bleu) ATG, (rouge) DTG.

D'après la Figure IV-4, on peut distinguer 3 pics principaux. Le premier pic ① à 86,18°C dans une plage de [45°C-184°C] qui est dû à l'évaporation de l'eau. Cette plage correspond à une perte de masse de 3,4 % de la masse totale. Le deuxième pic ② à 333,6°C dans une plage de [184°C-354°C] auquel correspond une perte de masse de 41 % est dû d'après la littérature à la décomposition de la cellulose des fibres de chanvre (Magniont et al., 2011; Sedan, 2007). Dans cette partie, on remarque un petit épaulement ④ qui correspond à la dépolymérisation de l'hémicellulose des fibres

végétales (Umurigirwa, 2014; Yao et al., 2008) ou bien aux pectines et des éléments de types graisse ou cire (Mellon and Sharma, 2002; Sedan, 2007). Le troisième pic ③ à 416,72°C dans une plage de [354°C-555°C], auquel correspond une perte de masse de 14 % de la masse totale, est dû à la dégradation des hémicelluloses structurales (Mellon and Sharma, 2002) ou bien d'après d'autres auteurs (Ouajai and Shanks, 2005; Yao et al., 2008) correspond aux particules de charbon ou goudron, les résidus de la décomposition des composants principaux.

En fin de mesure de l'ATG, il reste 5,48 mg de cendre qui correspond à 19 % de la masse totale de notre matériau. Les résultats de l'ATG permettent ainsi d'avoir une idée de la composition de la laine. On notera cependant que la masse d'essais est bien trop faible pour être représentative du matériau dans son ensemble.

IV.4 PREDICTION DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE

Dans le contexte de cette thèse, la propriété physique qui nous intéresse ici est principalement la conductivité thermique. Cette propriété peut s'obtenir de différentes façons : par mesure expérimentale, par une approche théorique/empirique à partir de modèles ou par simulation numérique.

Une première approche possible est d'utiliser des modèles de conductivité qui donnent une relation analytique entre certaines propriétés géométriques et physiques et la conductivité thermique effective du matériau (Arnaud and Cerezo, 2002). Cependant, l'anisotropie et la structure complexe du réseau de fibres, ainsi que la variabilité des fibres elles-mêmes, font que la plupart des modèles existants de conductivité présentant un intérêt limité pour prédire le tenseur de conductivité thermique effective de ces matériaux fibreux. Même si certains modèles ont été spécifiquement conçus pour traiter les milieux fibreux, ils ont encore besoin de données d'entrée réalistes comme l'orientation, la taille des fibres, la porosité, la conductivité thermique locale, etc.

Une alternative très intéressante est d'utiliser des images tomographiques 3D couplés à des techniques d'analyse d'image avancées (Lux et al., 2011; Rolland du Roscoat et al., 2007) qui peuvent être utilisées pour calculer directement les propriétés effectives des matériaux étudiés soit par simulation directe (Delisée et al., 2010a; Dirrenberger, 2012) ou en utilisant des techniques de changement d'échelle (Bernard et al., 2005; Lux et al., 2006) comme celle que nous avons développée dans cette thèse.

Dans cette partie, nous allons tester et comparer ces différentes approches afin d'évaluer de façon précise cette propriété.

IV.4.1 Caractérisation expérimentale

Différentes techniques de mesure de la conductivité thermique sont présentes dans la littérature. Dans le cas des matériaux fortement isolants et poreux, les méthodes dynamiques présentent de nombreux avantages.

La méthode employée ici pour mesurer la conductivité thermique est une méthode instationnaire qui est basé sur la technique de la source plane transitoire modifiée. Le dispositif utilisé a été développé par C-Therm. Il est essentiellement équipé d'un capteur (TCi™) au sein duquel est placé un élément chauffant. Un échantillon du matériau à caractériser est placé sur cet élément chauffant. L'élément chauffant est alimenté par un

courant électrique et dissipe par effet Joule une puissance de quelques Watts sur une courte période (quelques secondes). L'échantillon absorbe la chaleur émise par élément chauffant ce qui modifie la température à l'interface capteur-échantillon. À partir d'une calibration du capteur, on peut ainsi obtenir la conductivité thermique du matériau.

Les résultats obtenus correspondent à la moyenne de trois essais.

IV.4.2 Évaluation de la conductivité thermique à partir de simulation sur des images tomographiques

Dans le chapitre 3, nous avons explicité la forme du tenseur de conductivité effectif en fonction des variables de fermeture. Ce tenseur peut donc être calculé directement à partir des images tomographiques en résolvant le problème de fermeture associé (Lux et al., 2006).

On rappelle la forme de la conservation de l'énergie à l'échelle macroscopique (III.382) :

$$\begin{aligned} \{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + \{\dot{m}_{cond}\} \Delta h_{cond} + \{\dot{m}_{sorp}\} \Delta h_{sorp} \\ = \nabla \cdot \left[\mathbf{\Lambda}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} + \mathbf{\Lambda}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \mathbf{\Lambda}_t^{eff} \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Afin de comparer le calcul aux mesures, on se place dans des conditions où il n'y a pas de transfert hydrique et donc pas de condensation ni de sorption. L'équation prend alors la forme très classique (Nozad et al., 1985; Michel Quintard and Whitaker, 1993) :

$$\{\rho C_p\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{\Lambda}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\}) \quad (IV.3)$$

avec $\{T\}$ la température macroscopique,

$\{\rho C_p\} = \epsilon_p \rho_p c_{p_p} + \epsilon_c \rho_c c_{p_c} + \epsilon_g \rho_g c_{p_g}$ la capacité thermique moyenne de la laine,

$\mathbf{\Lambda}_T^{eff}$ le tenseur de conductivité thermique équivalent défini par :

$$\mathbf{\Lambda}_T^{eff} = \lambda_g \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{s}_{gT}\}^g + \epsilon_p \lambda_p \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{s}_{pT}\}^p + \epsilon_c \{\lambda_{cT}^{eff}\}^c \cdot \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{s}_{cT}\}^c$$

Les vecteurs \mathbf{s}_{gT} , \mathbf{s}_{pT} et \mathbf{s}_{cT} sont les variables de fermeture qui relient les températures locales et macroscopiques. Ces variables de fermeture sont solution du problème de fermeture (Lux et al., 2006 ; Quintard and Whitaker, 1993) qui prend la forme suivante dans ce cas :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\lambda_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} + \tilde{\lambda}_{cT}^{eff} \right) &= 0 \text{ dans } V_c \quad (\text{chanvre}) \\ \Delta \mathbf{s}_{pT} &= 0 \text{ dans } V_p \quad (\text{polymère}) \\ \Delta \mathbf{s}_{gT} &= 0 \text{ dans } V_g \quad (\text{air}) \end{aligned} \quad (IV.4)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{cT} &= \mathbf{s}_{gT} \text{ sur } S_{cg} \\
 \mathbf{s}_{cT} &= \mathbf{s}_{pT} \text{ sur } S_{cp} \\
 \mathbf{s}_{gT} &= \mathbf{s}_{pT} \text{ sur } S_{gp} \\
 \mathbf{n}_{cg} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla(\mathbf{s}_{cT}) &= \mathbf{n}_{cg} \cdot \lambda_{pg} \nabla(\mathbf{s}_{gT}) + \mathbf{n}_{cg} \cdot (\lambda_g \mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}) \text{ sur } S_{cg} \\
 \mathbf{n}_{cp} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff} \cdot \nabla \mathbf{s}_{cT} &= \mathbf{n}_{cp} \cdot \lambda_p \nabla \mathbf{s}_{pT} + \mathbf{n}_{cp} \cdot (\lambda_p \mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}) \text{ sur } S_{cp} \\
 \lambda_g \nabla(\mathbf{s}_{gT}) \cdot \mathbf{n}_{pg} &= \lambda_p \nabla(\mathbf{s}_{pT}) \cdot \mathbf{n}_{pg} + (\lambda_p - \lambda_g) \cdot \mathbf{n}_{pg} \text{ sur } S_{gp} \\
 \mathbf{s}_{gT}(\mathbf{r} + l_i) &= \mathbf{s}_{gT}(\mathbf{r}), \mathbf{s}_{pT}(\mathbf{r} + l_i) = \mathbf{s}_{pT}(\mathbf{r}), i = x, y, z \text{ Périodicité} \\
 \langle \mathbf{s}_{cT} \rangle &= \langle \mathbf{s}_{gT} \rangle = \langle \mathbf{s}_{pT} \rangle = 0
 \end{aligned} \tag{IV.5}$$

où $\boldsymbol{\lambda}_{cT}^{eff}$ est le tenseur de conductivité thermique local. À défaut d'avoir pu le calculer faute d'information sur la microstructure réelle des fibres de chanvre, on prendra pour nos calculs des valeurs de la littérature. Les valeurs de la conductivité thermique des fibres de chanvre sont fixées à 0,44 W.m⁻¹.K⁻¹ pour les composantes radiales et tangentielles et 0,88 W.m⁻¹.K⁻¹ pour la composante longitudinale (Lux, 2005 ; Siau, 1984). Pour l'air et les fibres de polymère, les conductivités thermiques ont été fixées respectivement à 0,026 W.m⁻¹.K⁻¹ et 0,33 W.m⁻¹.K⁻¹.

Le problème de fermeture est ensuite résolu directement sur l'ensemble des images tomographiques par une méthode de type volume fini détaillée dans (Edwards and Rogers, 1994).

IV.4.3 Modèles analytiques et semi-empiriques

Plusieurs modèles peuvent être trouvés dans la littérature pour prédire la conductivité thermique des milieux hétérogènes (Wang and Pan, 2008). Certains sont basés sur l'analogie électrique (Carson et al., 2003), sur l'équation de Fourier (Collet et al., 2008) ou simplement découlent de lois empiriques (Collet et al., 2008). Ces modèles prédisent la conductivité thermique λ thermique efficace d'un matériau en fonction de la fraction volumique de chaque composant ou de la phase, de leur conductivité thermique locale et de la forme et de la taille des particules.

❖ *Modèles série et parallèle*

Les modèles parallèle / arithmétique et série / harmonique (Carson et al., 2003; Wang and Pan, 2008) sont les plus simples des modèles de conductivité thermique à deux phases (Figure IV-5) et sont souvent utilisés comme référence pour la validation de nouveaux modèles.

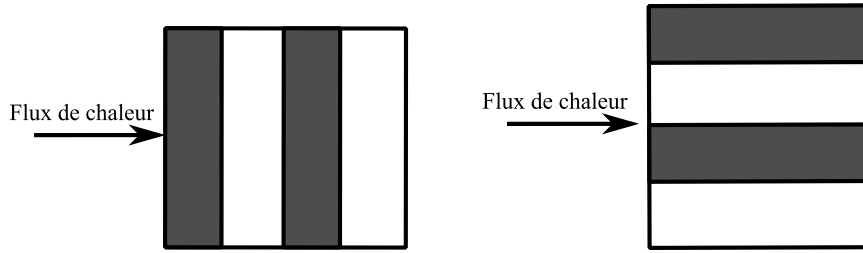


Figure IV-5 : Modèles série et parallèle.

Ce sont des modèles obtenus par analogie électrique. Lorsque la direction du flux de chaleur est parallèle aux couches, le modèle arithmétique est appliqué dans ce cas ; ce modèle donne les valeurs les plus élevées de la conductivité thermique :

$$\lambda_{//} = \theta \lambda_f + (1 - \theta) \lambda_a \quad (\text{IV.6})$$

où θ est la fraction volumique d'une phase (la phase fibre) ; λ_f est la conductivité thermique de la phase fibre ; λ_a est la conductivité thermique de l'air (la phase fluide).

Lorsque la direction du flux thermique est perpendiculaire aux couches, la conductivité thermique effective peut être déterminée par le modèle harmonique. Ce modèle donne la limite basse de la conductivité thermique et s'écrit :

$$\frac{1}{\lambda_{\perp}} = \frac{\theta}{\lambda_f} + \frac{1 - \theta}{\lambda_a} \quad (\text{IV.7})$$

❖ *Modèle géométrique*

Lorsque les phases sont distribuées au hasard, le modèle géométrique est utilisé (Filali, 2006; Kumlutaş et al., 2003), en tant que la moyenne géométrique de Lichtenecker.

$$\lambda = \lambda_a^{(1-n)} \lambda_f^n \quad (\text{IV.8})$$

avec n la porosité du milieu.

❖ *Modèle de Maxwell*

Certains modèles sont dérivés de la loi de Fourier. C'est le cas des modèles de Maxwell (Kumlutaş et al., 2003; Wang and Pan, 2008), largement utilisés sur les matériaux en deux phases : l'une est continue et l'autre est dispersé. Les particules sphériques sont distribuées au hasard dans une matrice homogène et sont distantes les unes des autres de sorte que les distorsions locales des caractéristiques de transport autour de chaque particule ne gênent pas leurs voisins (Figure IV-6).

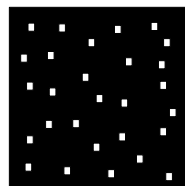


Figure IV-6 : Modèle de Maxwell.

La conductivité thermique s'exprime par :

$$\lambda = \lambda_f \frac{\lambda_f + 2\lambda_a + 2\theta(\lambda_f - \lambda_a)}{\lambda_f + 2\lambda_a - \theta(\lambda_f - \lambda_a)} \quad (\text{IV.9})$$

❖ *Modèle de Lewis et Nielsen*

Ce modèle tient compte de la forme des particules solides (Pal, 2008), que ce soit des cubes, cylindres, sphères ou fibres. La conductivité thermique s'écrit :

$$\lambda = \lambda_a \frac{1 + A\beta\phi}{1 - \beta\phi\psi} \quad (\text{IV.10})$$

avec $\beta = \frac{(\frac{\lambda_f}{\lambda_a})^{-1}}{(\frac{\lambda_f}{\lambda_a}) + A}$, $\psi = 1 + \frac{1-\phi_m}{\phi_m^2}\phi$, $A = \frac{2,5}{\phi_a} - 1$

où ϕ est la fraction volumique des particules et ϕ_m est la fraction volumique de remplissage maximum de particules.

Dans le cas de fibres, on prend $\phi_a = \phi_m = 0,52$.

❖ *Modèle de Halpin Tsai*

Ce modèle prend lui aussi en compte la forme des particules solides que ce soit des fibres ou des disques (Affdl and Kardos, 1976). La conductivité thermique s'exprime sous la forme :

$$\lambda = \lambda_a \left(\frac{1 + \xi\eta\phi}{1 - \eta\phi} \right) \quad (\text{IV.11})$$

avec $\eta = \frac{\frac{\lambda_f}{\lambda_a} - 1}{\frac{\lambda_f}{\lambda_a} + \xi}$ et $\xi = \sqrt{3} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ avec « a » la largeur des plaquettes et « b » l'épaisseur.

Dans le cas des fibres, on a considéré une section circulaire et pris $\xi = 1$.

❖ *Modèle de Wyllie et Southwick*

Le modèle de Wyllie et Southwick proposent une approche des phases de la série-parallèle mixte qui peut prendre en considération l'orientation des fibres (Wyllie and Southwick, 1954).

$$\lambda = \alpha\lambda_{//} + (1 - \alpha)\lambda_{\perp} \quad (\text{IV.12})$$

avec $\lambda_{//} = n_1\lambda_a + (1 - n_1)\lambda_f$ et $\lambda_{\perp} = \frac{\lambda_f\lambda_a}{n_2\lambda_f + (1 - n_2)\lambda_a}$

$\lambda_{//}$ est la conductivité thermique des fibres parallèles au flux de chaleur.

λ_{\perp} est la conductivité thermique des fibres perpendiculaires.

$n = \alpha n_1 + (1 - \alpha) n_2$ où α est la fraction volumique des composants parallèles au flux de chaleur et n_1 et n_2 sont les fractions volumiques de chaque composant dans la direction perpendiculaire du flux.

Ces modèles fournissent la conductivité thermique dans une direction.

Dans le cas du matériau étudié, trois composants (air, fibre et polymère) coexistent. Pour cela, on a adapté le modèle de Wyllie et Southwick à 3 composants comme précisé sur la Figure IV-7. Par la suite, ce modèle sera utilisé pour des calculs pseudo 3D.

$$\lambda = \alpha \lambda_{//} + (1 - \alpha) \lambda_{\perp} \quad (\text{IV.13})$$

$$\text{avec } \lambda_{//} = n_1 \lambda_h + n'_1 \lambda_p + (1 - n_1 - n'_1) \lambda_f \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda_{\perp}} = \frac{n_2}{\lambda_h} + \frac{n'_2}{\lambda_p} + \frac{1 - n_2 - n'_2}{\lambda_a}$$

où n_1 et n'_1 représentent les fractions volumiques de chaque composant dans la direction parallèle au flux de chaleur et n_2 et n'_2 les fractions volumiques dans la direction perpendiculaire.

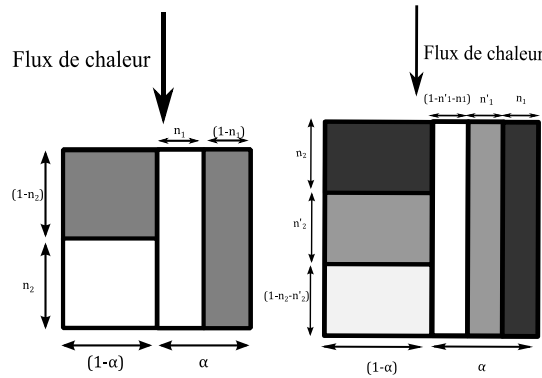


Figure IV-7 : Modèle de Wyllie et Southwick pour deux et trois composants.

❖ Modèle de Krischer et Kröll

Ce modèle (Krischer and Kroll, 1956) ressemble au modèle de Wyllie et Southwick avec une différence dans la direction du flux comme on peut la voir sur la Figure IV-8.

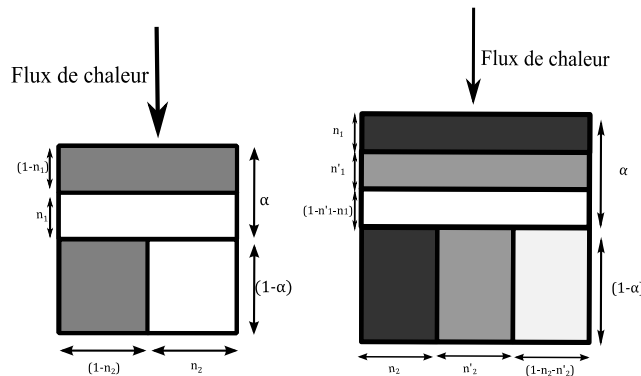


Figure IV-8 : Modèle de Krischer et Kröll pour deux et trois composants.

Dans le cas de 3 composants, la conductivité thermique s'écrit :

$$\lambda = \frac{\lambda_{\perp} \lambda_{//}}{\alpha \lambda_{\perp} + (1 - \alpha) \lambda_{//}} \quad (IV.14)$$

$$\text{avec } \lambda_{//} = n_1 \lambda_h + n'_1 \lambda_p + (1 - n_1 - n'_1) \lambda_f \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda_{\perp}} = \frac{n_2}{\lambda_h} + \frac{n'_2}{\lambda_p} + \frac{1 - n_2 - n'_2}{\lambda_a}$$

❖ *Modèle Auto-cohérent (HAC)*

Le modèle d'homogénéisation auto-cohérent (HAC) est une méthode populaire pour les inclusions ellipsoïdales (Arnaud and Cerezo, 2002). Mais ce modèle ne tient pas compte de l'orientation des fibres. On exprime ci-dessous l'expression de la conductivité thermique pour un milieu à deux phases (Figure IV-9).

$$\lambda = \lambda_f \left[1 + \frac{\beta}{\frac{1 - \beta}{3} + \frac{1}{\lambda_a / \lambda_f - 1}} \right] \quad (IV.15)$$

avec $\beta = \left(\frac{R_a}{R_f} \right)^3$ où R_a et R_f dépendent de la fraction volumique de l'air et des fibres (ici le chanvre et les polymères).

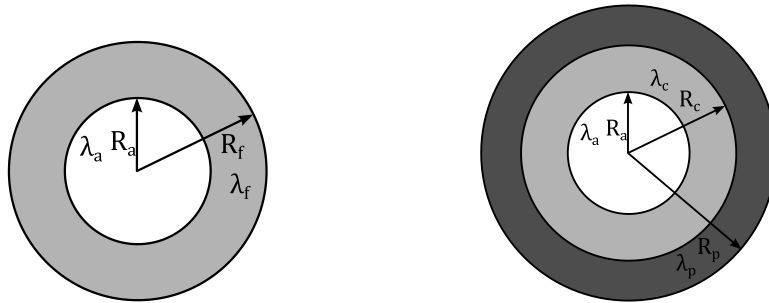


Figure IV-9 : Structure schématique du modèle auto-cohérent.

Si on considère les 3 composants, la conductivité thermique devient :

$$\frac{\lambda}{\lambda_p} = 1 + \frac{\beta}{\frac{1 - \beta}{3} + \frac{3 + \delta \left(\lambda_a / \lambda_c - 1 \right)}{3 \left(\lambda_a / \lambda_p - 1 \right) - \delta \left(\lambda_a / \lambda_c - 1 \right) \left(2 \lambda_c / \lambda_p + 1 \right)}} \quad (IV.16)$$

avec $\beta = \left(\frac{R_h}{R_p} \right)^3$ et $\delta = 1 - \left(\frac{R_a}{R_h} \right)^3$

où R_a , R_h et R_p dépendent respectivement de la fraction volumique de l'air, du chanvre et du polymère comme on peut voir sur la Figure IV-9.

IV.4.4 Résultats

Les modèles précédents ont été testés et les résultats (Tableau IV-2) sont comparés avec ceux obtenus par des mesures expérimentales et les simulations sur les images tomographiques.

Dimension	Modèles	Conductivité thermique (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
Isotopique 1D	Mesures expérimentales	0,041 ± 0,002
	Modèle harmonique	0,029
	Modèle arithmétique	0,081
	Modèle géométrique	0,035
	Modèle de Maxwell	0,066
	Modèle de Halpin-Tsai	0,031
	Modèle de Lewis et Nielsen	0,036
	HAC (2 phases)	0,068
	HAC (3 phases)	0,061
Pseudo anisotropique 3D	Modèle de Wyllie et Southwick (3 phases)	selon x : 0,075
		selon y : 0,052
		selon z : 0,039
	Modèle de Krischer et Kröll (3 phases)	selon x : 0,054
		selon y : 0,038
		selon z : 0,032
Anisotropique 3D	Prise de moyenne sur les images 3D	selon x : 0,056 ± 0,006
		selon y : 0,047 ± 0,005
		selon z : 0,035 ± 0,001

Tableau IV-2 : Valeurs des conductivités thermiques effectives.

La conductivité thermique est calculée à partir de la fraction volumique des trois phases, identifiées précédemment sur l'image 3D. Les conductivités thermiques de l'air et du polymère sont respectivement fixées à 0,026 et 0,33 W.m⁻¹.K⁻¹ respectivement.

Pour les modèles isotropes (harmonique, arithmétique, géométrique, Maxwell, Halpin-Tsai, Lewis et Nielsen, HAC), la conductivité thermique effective du chanvre a été calculée comme la moyenne des valeurs longitudinales et transversales parce que ces modèles ne tiennent pas compte de l'anisotropie de la conductivité locale.

Dans le cas des modèles anisotropes (Wyllie et Southwick, Krischer et Kröll), la conductivité thermique est calculée à trois reprises, pour un flux de chaleur le long des axes x, y et z respectivement. Ceci permet d'évaluer les trois composantes du tenseur de conductivité thermique efficace.

Afin de calculer les valeurs de conductivité le long de l'axe x et de l'axe y, nous devons calculer le pourcentage de fibres orientées principalement le long de ces axes (quel que

soit leur angle radial). Pour ce faire, nous utilisons le résultat du calcul obtenu dans le chapitre 2. Nous avons supposé que les fibres avec un angle azimutal $\theta \in [-45^\circ ; 45^\circ]$ et $\theta \in [135^\circ ; 215^\circ]$ sont principalement orientées suivant l'axe x et les autres fibres sont orientées essentiellement le long de l'axe y (Figure IV-10-B). Nous avons pris uniquement la projection des vecteurs d'orientation sur le plan transversal, du fait de la nature bidimensionnelle du modèle. Afin de calculer la conductivité le long de l'axe z, nous avons divisé les vecteurs d'orientation locale en deux catégories : les vecteurs principalement orientés sur les plans transversaux (angle radial de $\varphi \leq 45^\circ$) et les vecteurs principalement orientés le long de l'axe z (radiale angle $\varphi > 45^\circ$), comme illustré sur la Figure IV-10-A.

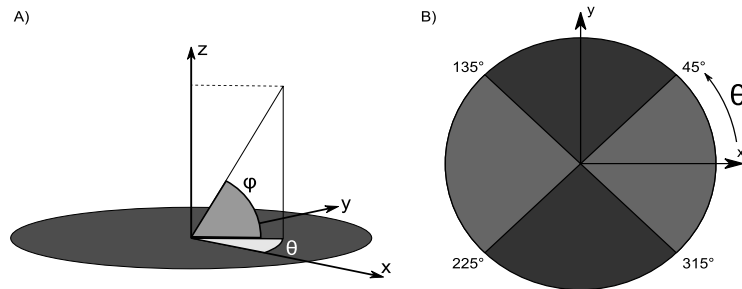


Figure IV-10 : Notation sphériques : φ l'angle radiale et θ l'angle azimutale.

En appliquant cette méthode, on trouve que les pourcentages de fibres orientées principalement le long des axes x et y (quel que soit leur angle radial) sont respectivement 66,62 % et 33,38 %. Le pourcentage de fibres orientées essentiellement le long de l'axe z (quel que soit l'angle azimutal) est seulement de 14,94 %, tandis que 85,06 % des fibres ont un angle radial de moins de 45° .

La conductivité thermique transversale de fibres de chanvre ($0,44 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) est utilisée pour les fibres perpendiculaires au flux de chaleur, et la conductivité thermique longitudinale de fibres de chanvre ($0,88 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) est utilisée pour les fibres de chanvre parallèles au flux de chaleur. La fraction volumique utilisée dans les modèles anisotropes sont $n_1 = n_2 = 7,83 \%$ (fibres de chanvre), $n'_1 = n'_2 = 1,69 \%$ (fibres de polymère), et $1 - n_1 - n'_1 = 1 - n_2 - n'_2 = 90,48 \%$ (la porosité). Les trois valeurs différentes pour α qui sont utilisées pour calculer les trois composantes de conductivité sont : $\alpha_x = 66,62 \%$, $\alpha_y = 33,38 \%$ et $\alpha_z = 14,94 \%$.

Ces résultats confirment que les modèles isotropes ne sont pas très pertinents pour prédire la conductivité thermique d'un milieu fibreux naturel. Certains d'entre eux donnent une valeur de conductivité proche de la composante de conductivité axe z calculé numériquement sur l'image 3D (les modèles : Halpin-Tsai, géométrique et Lewis et Nielsen), mais les autres donnent des valeurs beaucoup plus élevées que les composantes des axes x et y. En outre, aucun modèle isotrope ne se rapproche de la valeur expérimentale. Dans tous les cas, ces modèles peuvent fournir une estimation approximative de la conductivité thermique, mais ne peuvent pas être utilisés pour étudier l'impact de l'orientation des fibres sur la performance du produit final.

Au contraire, les modèles anisotropes sont capables de donner une meilleure estimation de l'anisotropie de la conductivité thermique en fonction de la répartition de l'orientation des fibres. Ces modèles sont cependant limités par leur géométrie très simple, qui ne permet pas de prendre en compte le nombre de contacts, la distribution des diamètres de fibre ou la tortuosité des fibres. Pourtant, les résultats du modèle de

Krisher et Kröll sont en bon accord avec les valeurs de conductivité calculées sur l'image 3D. Ces résultats tendent à montrer que ces modèles simples peuvent malgré tout être intéressants pour étudier la relation entre les propriétés thermiques et certains paramètres structuraux de matériaux anisotropes comportant une microstructure 3D complexe.

Enfin, nos résultats montrent que l'approche numérique complète bien les mesures expérimentales. En effet, les résultats numériques mettent en évidence l'anisotropie de la conductivité thermique qui est en accord avec les résultats de l'analyse d'image, mais qui n'a pas été détecté par le dispositif expérimental. Enfin, la moyenne sur les trois composantes calculée numériquement est, de $0,046 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, ce qui est à peu près du même ordre que de la valeur mesurée.

IV.5 ÉVALUATION DE LA CHALEUR MASSIQUE

La chaleur massique a été mesurée à l'aide d'un microcalorimètre SETARAM (Figure IV-11). Cette technique se base sur le fait que lors d'une transformation physique, une certaine quantité de chaleur est échangée avec l'échantillon pour être maintenue à la même température que la référence. En mesurant la différence de flux de chaleur entre l'échantillon et la référence, un calorimètre peut mesurer la quantité de chaleur absorbée ou libérée au cours d'un changement d'état.



Figure IV-11 : Microcalorimètre (SETARAM).

La capacité de chaleur spécifique d'un matériau doit tenir compte de la fraction de masse M_i et de la chaleur spécifique intrinsèque des différentes composantes i , et peut être exprimée par la relation :

$$c = \sum_{i=1}^N (M_i c_i) \quad (\text{IV.17})$$

La capacité thermique spécifique de fibres sèches nécessite deux mesures. Une première mesure est réalisée sur un récipient vide, suivie par une autre mesure réalisée sur l'échantillon dont on souhaite déterminer la chaleur spécifique. La capacité thermique est alors déterminée à la température T par la relation :

$$C_{p,\text{échantillon}}(T) = \frac{\left(\frac{dH}{dt}\right)_{\text{échantillon}} - \left(\frac{dH}{dt}\right)_{\text{cellule vide}}}{m_{\text{échantillon}} \frac{dT}{dt}} \quad (\text{IV.18})$$

L'échantillon a préalablement été séché dans une étuve à 100°C pendant 3 heures. Il a ensuite été refroidi dans un dessiccateur pour éviter toute reprise d'eau. Sa masse avant séchage est de 198,64 mg et sa masse après séchage est de 187,27 mg, soit une teneur en eau en base sèche de 0,06 (soit environ 6 % d'eau).

L'échantillon est comprimé pour être inséré dans sa totalité dans une cellule standard (1 mL), elle-même insérée dans le microcalorimètre (SETARAM μ DSC7 Evo) maintenu à 20°C. Une cellule standard vide est introduite dans le calorimètre et sert de référence. Après une période d'équilibrage du signal, les profils de température suivants sont programmés :

- Isotherme à 20°C pendant 60 minutes
- Chauffage de 20°C à 80°C à 0,2°C.min⁻¹
- Isotherme à 80°C pendant 60 minutes

Un test à blanc est réalisé dans les mêmes conditions, mais avec 2 cellules vides.

La figure suivante montre l'évolution de la chaleur massique de la laine de chanvre séchée en fonction de la température.

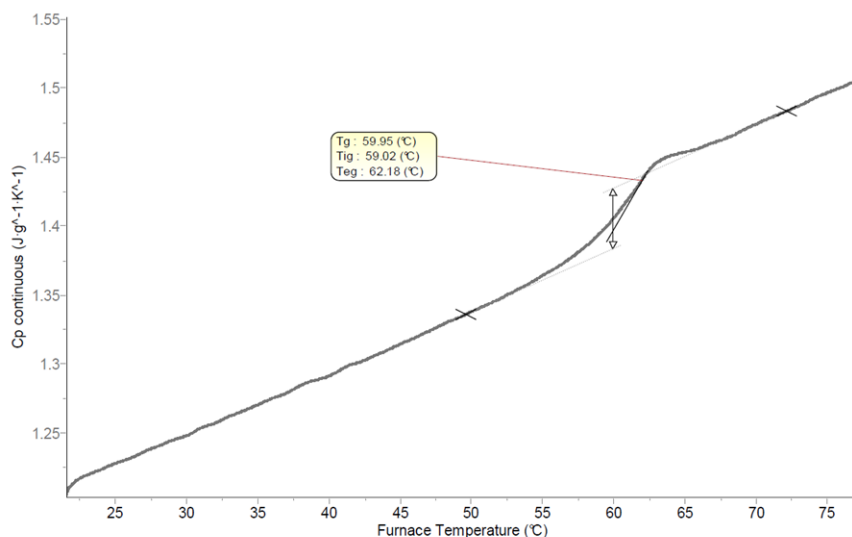


Figure IV-12 : Variation de la chaleur massique en fonction de la température.

D'après la Figure IV-12, on remarque que la chaleur massique varie entre 1200 et 1500 J.kg⁻¹.K⁻¹. A 25°C, on obtient une valeur autour de 1225 J.kg⁻¹.K⁻¹ et à 20°C on a une valeur autour 1207 J.kg⁻¹.K⁻¹. Vers 60°C, un effet caractéristique d'une transition vitreuse est observé. Il s'agit de la transition vitreuse du contenu en polyester de l'échantillon.

Pour un matériau humide, la chaleur massique varie selon la formule suivante (Collet et al., 2008) :

$$c^* = \frac{c_0 + w c_{eau}}{1 + w} \quad (IV.19)$$

avec c^* la chaleur massique équivalente du matériau humide, c_0 la chaleur massique du matériau sec, w la teneur en eau et c_{eau} la chaleur massique de l'eau.

Pour une humidité relative de 50 % et à 20°C on a une teneur à eau de 0,069 [kg.kg⁻¹], la chaleur massique de la laine sera 1 399,2 J.kg⁻¹.K⁻¹.

IV.6 PREDICTION DES PROPRIETES HYDRIQUES

Les fibres végétales sont très sensibles aux variations climatiques, que ce soit de l'humidité ou de la température. Une variation de l'humidité de l'air à proximité amène à une variation de la teneur en eau des fibres. Cela peut modifier de façon importante leur comportement au contraire des laines minérales qui sont hydrophobes et donc moins sensibles à l'humidité. Ainsi, notre première étape est de voir comment se comportent ces fibres en présence d'eau notamment en évaluant le phénomène de sorption / désorption de la laine.

IV.6.1 Isothermes de sorption / désorption

IV.6.1.1 Mesure expérimentale

On distingue deux types de méthodes (Hill et al., 2012) pour déterminer expérimentalement les isothermes de sorption/désorption : la méthode statique ou gravimétrique (qui est une méthode lente et qui peut durer plusieurs semaines, voire plusieurs mois suivants les matériaux) et la méthode dynamique. Les résultats qui sont présentés ici ont été obtenus à l'aide d'une méthode dynamique DVS (Dynamic Vapor Sorption).

Le principe de la méthode DVS (Figure IV-13) consiste à placer un échantillon sec, de quelques milligrammes, dans un récipient ouvert. Un courant d'air à température et humidité relative contrôlées circule autour de ce récipient. L'échantillon va se mettre en équilibre thermohydrique avec l'air ambiant. Cette opération est alors répétée pour différentes valeurs d'humidité relative de 10 % à 90 %. A chaque équilibre, la masse de l'échantillon est mesurée.

L'ensemble de ces mesures (humidité relative de l'air – masse de l'échantillon) est tracé sur un graphique et donne ce que l'on appelle une « courbe de sorption ». Pour obtenir la « courbe de désorption », l'opération inverse est réalisée (humidité abaissée de 90 % à 10 %).

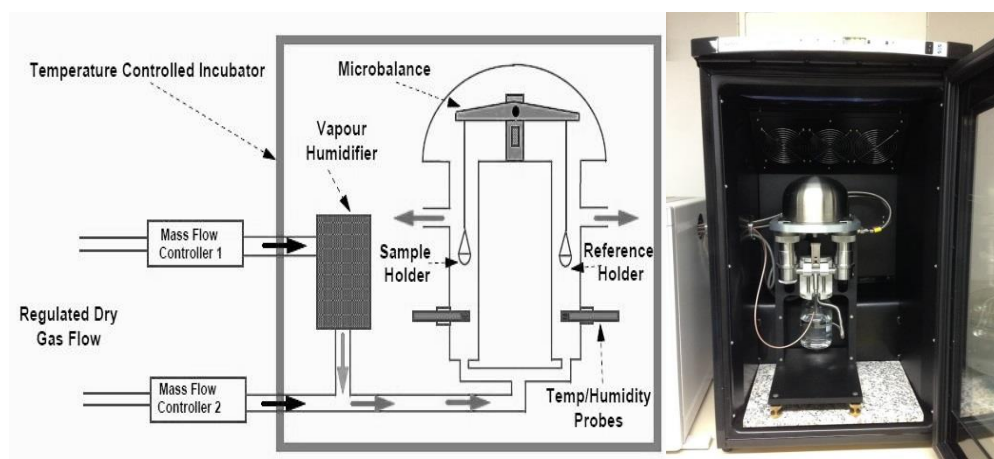


Figure IV-13 : Appareil de mesure des isothermes de sorption/désorption (DVS).

L'appareil utilisé (Surface Measurement Systems) permet le suivi de la prise ou de la perte de masse de l'échantillon à l'aide d'une microbalance de type Cahn d'une précision de $\pm 5 \mu\text{g}$ et ainsi de réduire les temps d'expérimentation.

Un exemple de mesure réalisé sur la laine de chanvre est présenté sur la Figure IV-14. L'échantillon a subi lors de cette expérimentation deux cycles de sorption/désorption.

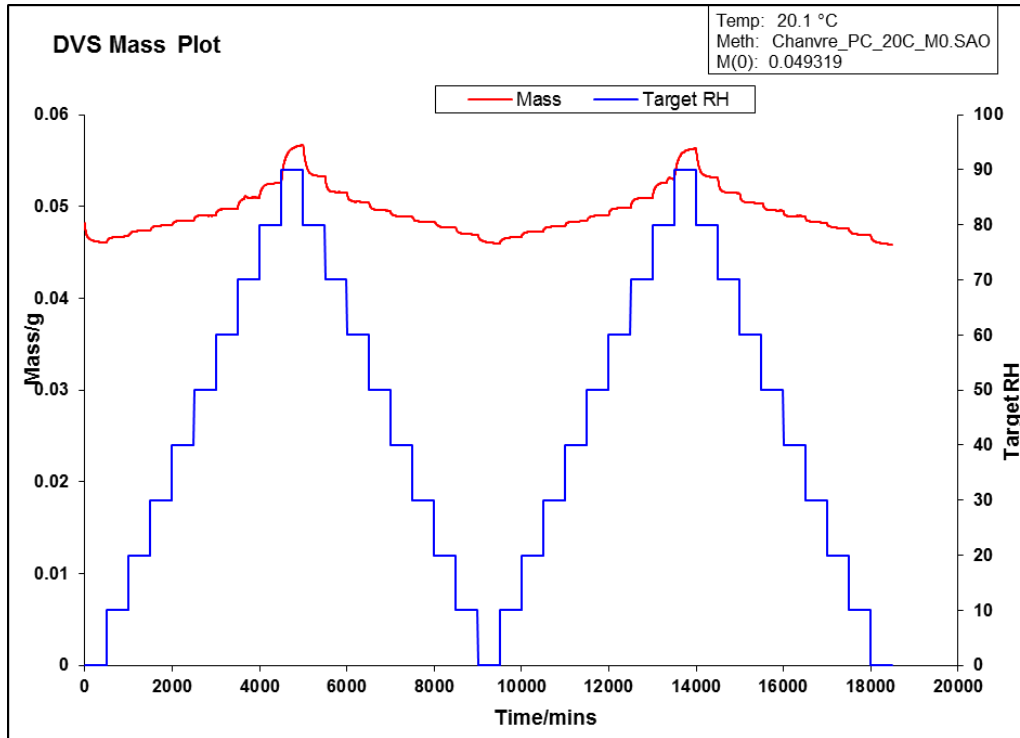


Figure IV-14 : Cinétique d'évolution de la masse (rouge) en fonction des échelons d'humidité relative (bleu) lors d'un essai dynamique de détermination des isothermes de sorption/désorption de vapeur d'eau d'une laine de chanvre.

IV.6.1.2 Modèles semi-empiriques

Plusieurs modèles mathématiques et empiriques permettant de décrire les isothermes de sorption (Chirife and Iglesias, 1978; Hill et al., 2012; Hong et al., 2002). Une description non exhaustive des modèles existants est présentée au paragraphe suivant.

❖ Modèle Langmuir

La théorie de Langmuir (Langmuir, 1918) modélise l'adsorption monocouche pour les milieux poreux. A l'équilibre, les vitesses d'évaporation et de condensation à la surface du solide sont égales. Dans ce type d'adsorption, les molécules d'eau sont liées au solide par une énergie de liaison molaire E_1 . La relation entre la teneur en eau du matériau et l'humidité relative ambiante est donnée par :

$$\frac{w}{w_m} = \frac{C_1 HR}{1 + C_1 HR} \quad \text{avec} \quad C_1 = \exp\left(\frac{E_1}{RT}\right) \quad (\text{IV.20})$$

avec w , la teneur en eau massique du matériau ; w_m , la teneur en eau massique du matériau lorsque le recouvrement des parois est total ; HR , l'humidité relative ambiante $[0 ; 1]$; E_1 , la chaleur molaire d'adsorption $[\text{J.mol}^{-1}]$; R , la constante des gaz parfaits $[\text{J.mol}^{-1}]$ et T , la température absolue $[\text{K}]$.

Ce modèle n'est vérifié que pour les faibles humidités relatives (inférieures à 10-20 %).

❖ *Modèle BET*

En 1938, à partir du modèle de Langmuir, le modèle de BET (Brunauer et al., 1938) qui décrit l'adsorption poly-moléculaire, a été développé en considérant que les molécules de la première couche sont liées au solide par une énergie égale à la chaleur molaire d'adsorption E_L et que les autres couches sont liées par une énergie égale à la chaleur molaire latente de vaporisation. Son application pour les milieux poreux n'est valable que pour les humidités relatives inférieures à 40 % du fait que l'eau se fixe au matériau sous forme de couches successives non limitées par la dimension des pores et par suite la teneur en eau pour une humidité relative de 100 % est infinie.

$$\frac{w}{w_m} = \frac{C_2 HR}{(1 - HR)(1 - HR + C_2 HR)} \quad \text{avec} \quad C_2 = \exp\left(\frac{E_1 - E_L}{RT}\right) \quad (\text{IV.21})$$

avec E_L , la chaleur molaire latente de vaporisation $[\text{J.mol}^{-1}]$.

Ce modèle peut nous renseigner sur la surface spécifique massique S_m de nos matériaux qui peut être évaluée à partir de la teneur en eau monomoléculaire w_m faite avec le modèle de BET :

$$S_m = \sigma_m \mathcal{N} \frac{w_m}{\overline{M}} \quad (\text{IV.22})$$

avec S_m , la surface spécifique massique $[\text{m}^2.\text{g}^{-1}]$; σ_m , la surface d'une molécule adsorbée ($\approx 10 \text{ \AA}^2$) ; \mathcal{N} , le nombre d'Avogadro ($6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) et \overline{M} , la masse molaire (eau : 18 g.mol^{-1}).

❖ *Modèle GAB*

Par la suite, Guggenheim, Anderson et De Boer ont établi un nouveau modèle : le modèle de GAB (Merouani, 1987) qui prend en compte la chaleur d'adsorption $E_m \neq E_L$ pour toutes les couches moléculaires. Ce modèle, comme le modèle de BET, n'est physiquement valable qu'en l'absence de condensation capillaire, c'est-à-dire pour des valeurs d'humidité relative faibles et moyennes.

$$\frac{w}{w_m} = \frac{C_3 C_4 HR}{(1 - C_4 HR)(1 - C_4 HR + C_3 C_4 HR)} \quad (\text{IV.23})$$

$$C_3 = \exp\left(\frac{E_1 - E_m}{RT}\right); C_4 = \exp\left(\frac{E_L - E_m}{RT}\right)$$

Ces trois modèles sont les principaux modèles utilisés. Sur la Figure IV-15 sont présentées les allures des courbes de ces modèles.

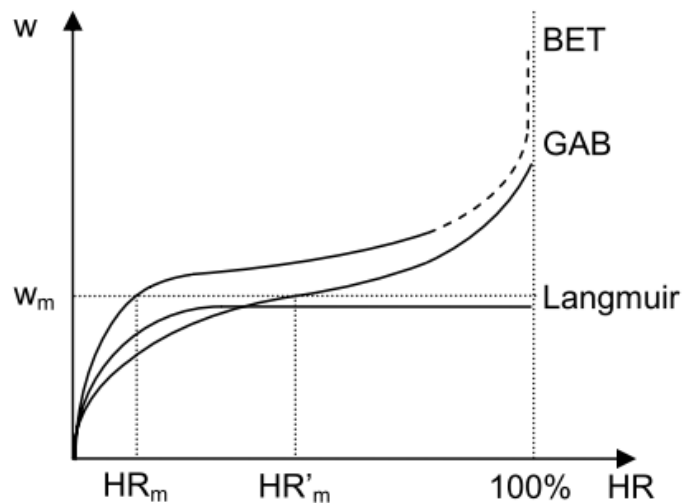


Figure IV-15 : Allures des courbes des principaux modèles d'adsorption.

❖ Modèle Harkins-Jura

Harkins & Jura (Harkins and Jura, 1944) ont proposé une équation pour l'isotherme d'adsorption dont la validité est limitée à des régions dans lesquelles les molécules adsorbées forment une membrane mince condensée. La relation peut être exprimée sous la forme :

$$\ln a_w = B - \frac{A}{w^2} \quad (\text{IV.24})$$

où A et B sont des constants et a_w est l'activité de l'eau.

Ce modèle est utilisé dans le cas des isothermes d'adsorption à haute pression relative en poly-moléculaire. Il est fiable pour des films polymères, mais n'est pas compatible avec un matériau très poreux comme la laine de chanvre.

❖ Modèle Henderson

Un des modèles les plus utilisés est l'équation d'Henderson (Henderson, 1952). Cette équation empirique peut être écrite sous la forme :

$$1 - a_w = \exp(-A T w^C) \quad (\text{IV.25})$$

L'équation d'Henderson décrit la dépendance à la température des isothermes expérimentales. D'après (Singh et Ojha 1974) l'utilisation du terme T n'élimine pas la dépendance de la température des paramètres A et C. Ils ont conclu que « l'équation de Henderson décrit correctement la dépendance à la température des isothermes expérimentales », dans le domaine du séchage des aliments.

❖ *Modèle Smith*

Il a été montré par Smith (SMITH et al.) que les parties incurvées finales des isothermes de sorption de l'eau de diverses bio-polymères peuvent être décrits par l'équation suivante :

$$w = A - B \ln(1 - a_w) \quad (\text{IV.26})$$

Cette équation peut être utilisée pour bien décrire les isothermes de désorption du blé pour une activité entre 0,5 et 0,95 %.

❖ *Modèle Oswin*

Le modèle de Oswin (Oswin, 1946) est un développement en série mathématique pour des courbes sigmoïdes en forme S, et peut être écrit sous la forme suivante :

$$a_w = \left[1 + \left(\frac{A + B T}{w} \right)^c \right]^{-1} \quad (\text{IV.27})$$

Ce modèle prend en compte la température et permet de décrire l'isotherme de façon complète.

❖ *Modèle de Chung et Pfof*

Chung et Pfof (Chung and Pfof, 1967) ont proposé un modèle de la forme :

$$\ln a_w = - \frac{A}{RT} \exp(-B w) \quad (\text{IV.28})$$

où A et B sont des constantes. Ce modèle est basé directement sur une hypothèse reliant le changement d'énergie de sorption à la teneur en humidité. L'équation ne peut pas être utilisée pour prédire l'effet de la température puisque l'utilisation du terme T ne supprime pas la dépendance des paramètres A et B à la température.

Un récapitulatif des modèles est présenté dans le tableau suivant :

Auteurs	Modèle	Paramètres	Application
Langmuir	$\frac{w}{w_m} = \frac{C_1 HR}{1 + C_1 HR}$	$C_1 = \exp\left(\frac{E_1}{RT}\right)$	Zone 1
BET	$\frac{w}{w_m} = \frac{C_2 HR}{(1 - HR)(1 - HR + C_2 HR)}$	$C_2 = \exp\left(\frac{E_1 - E_L}{RT}\right)$	Zone 2 Zone 1
BET	BET linéaire : $\frac{HR}{(1 - HR)w} = \frac{1}{C_2 w_m} + \frac{C - 1}{C w_m} HR$	w_m	
GAB	$\frac{w}{w_m} = \frac{C_3 C_4 HR}{(1 - C_4 HR)(1 - C_4 HR + C_3 C_4 HR)}$	$C_3 = \exp\left(\frac{E_1 - E_m}{RT}\right)$	Courbe complète
GAB	GAB linéaire : $\frac{HR}{(1 - C_4 HR)w} = \frac{1}{C_3 C_4 w} + \frac{C_3 - 1}{C_3 w_m}$	$C_4 = \exp\left(\frac{E_L - E_m}{RT}\right)$ w_m	
Harking-Jura	$HR = \exp\left(B - \frac{A}{w^2}\right)$	A, B	Courbe complète
Smith	$HR = 1 - \exp\left(\frac{A - w}{B}\right)$	A, B	Courbe complète
Henderson	$HR = 1 - \exp(-A(B + T)w^C)$	A, B, C	Courbe complète
Oswin	$HR = \left[1 + \left(\frac{A + B T}{w}\right)^C\right]^{-1}$	A, B, C	Courbe complète
Chung et Pfof	$HR = \exp\left[-\frac{A}{RT} \exp(-B w)\right]$	A, B	Courbe complète

Tableau IV-3 : Différents modèles utilisés pour la modélisation des isothermes de sorption/désorption.

IV.6.1.3 Résultats

Les essais ont été réalisés dans des conditions isothermes à 23°C pour des humidités relatives différentes. La Figure IV-16 représente les isothermes obtenues pour deux cycles réalisés à partir de la méthode DVS.

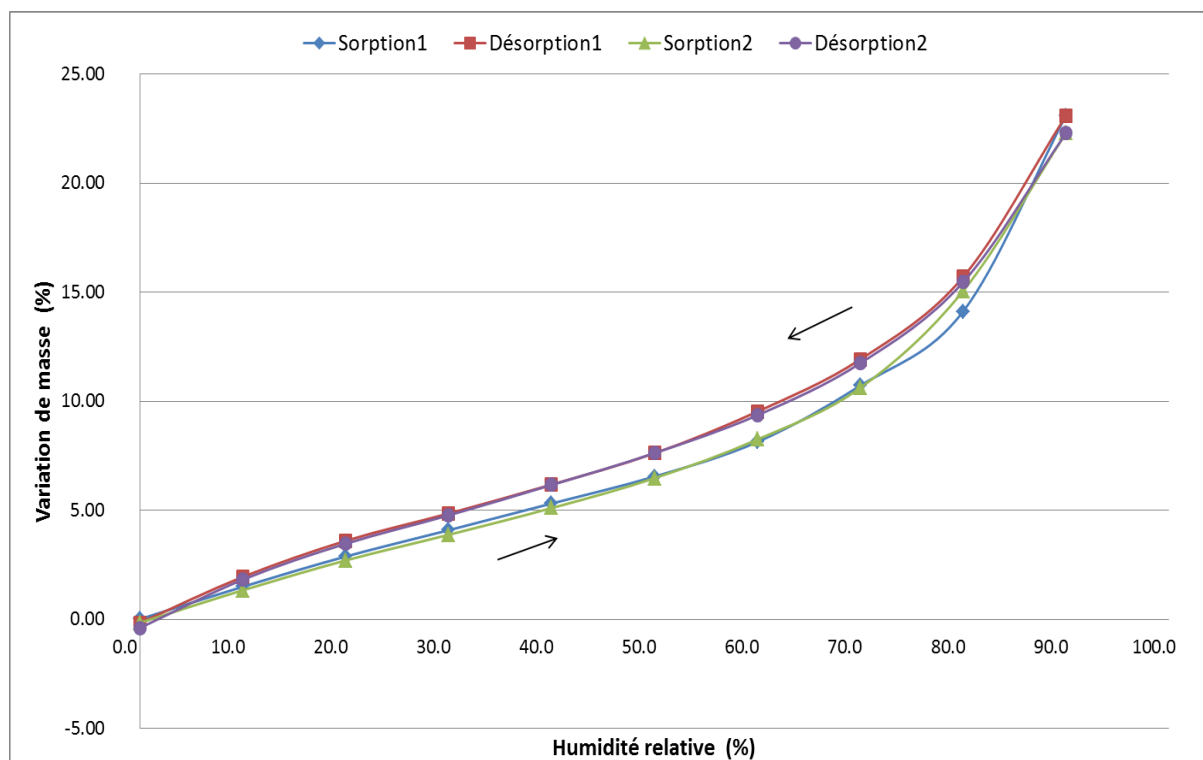


Figure IV-16 : Représentation des deux cycles de sorption / désorption ; variation de la masse en fonction de l'humidité relative.

Les courbes de la Figure IV-16 sont caractéristiques de la forme d'une isotherme de type II. On peut noter un phénomène d'hystérésis pour les deux cycles réalisés qui ressemble à une hystérésis de type IV, souvent associée à des adsorbants pouvant produire une condensation capillaire.

Les Tableau IV-4 et Tableau IV-5 présentent respectivement les valeurs de sorption / désorption des paramètres des différents modèles déjà explicités auparavant sur l'ensemble du domaine d'hygrométrie. Le calage des paramètres des modèles aux valeurs expérimentales est réalisé à l'aide d'une procédure de minimisation Figure IV-17.

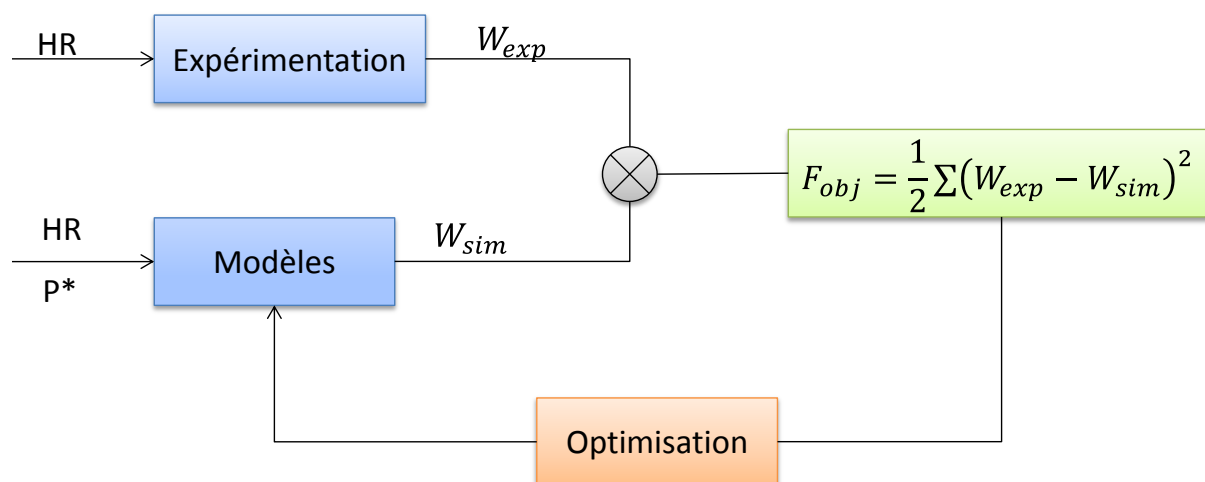


Figure IV-17 : Principe d'identification des paramètres des modèles.

Les Figure IV-18 et Figure IV-19 représentent les isothermes de sorption / désorption obtenues expérimentalement ainsi que celles déduites des modèles de Smith, GAB, Oswin et Henderson. On remarque que ces modèles suivent bien l'évolution expérimentale.

Modèles	Paramètres			
GAB	w_m	C_3	C_4	F_{obj}
	0,0437	7,1872	0,8911	$1,89 \cdot 10^{-5}$
Oswin	A	B	C	F_{obj}
	0,0089	0,0778	2,1032	$1,74 \cdot 10^{-6}$
Henderson	A	B	C	F_{obj}
	4,2183	2,948	1,075	$1,50 \cdot 10^{-4}$
Harkin-Jura	A	B	F_{obj}	
	0,0032	0,0333	$5,87 \cdot 10^{-4}$	
BET	w_m	C_2	F_{obj}	
	0,0234	78,1546	0,0022	
Smith	A	B	F_{obj}	
	0,0878	0,0071	$1,13 \cdot 10^{-4}$	
Chung et Pfof	A	B	F_{obj}	
	2,716	17,029	$9,50 \cdot 10^{-4}$	

Tableau IV-4 : Paramètres de sorption des différents modèles.

Modèles	Paramètres			
GAB	$w_m(\%)$	C_3	C_4	F_{obj}
	0,0542	7,6337	0,8435	$5,38 \cdot 10^{-6}$
Oswin	A	B	C	F_{obj}
	0,0152	0,0959	2,4987	$1,04 \cdot 10^{-5}$
Henderson	A	B	C	F_{obj}
	4,839	3,478	1,284	$7,92 \cdot 10^{-5}$
Harkin-Jura	A	B	F_{obj}	
	0,0039	0,0207	$7,70 \cdot 10^{-4}$	
BET	w_m	C_2	F_{obj}	
	0,0239	131,81	$3,5 \cdot 10^{-3}$	
Smith	A	B	F_{obj}	
	0,0874	0,0168	$1,42 \cdot 10^{-4}$	
Chung et Pfof	A	B	F_{obj}	
	3,232	17,03	$5,33 \cdot 10^{-4}$	

Tableau IV-5 : Paramètres de désorption des différents modèles.

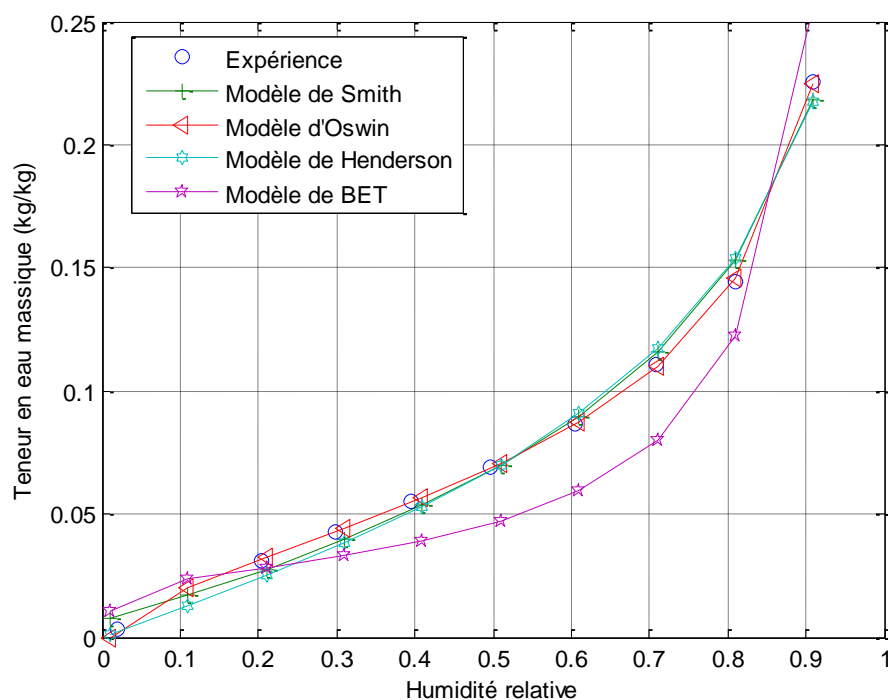


Figure IV-18 : Isotherme de sorption des mesures expérimentales de quelques modèles empiriques.

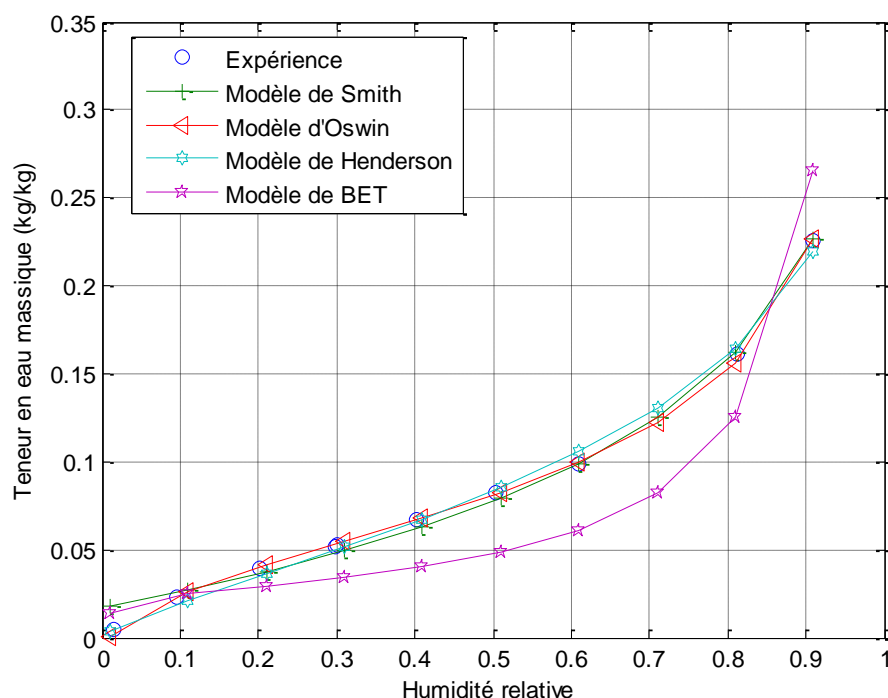


Figure IV-19 : Isotherme de désorption des mesures expérimentales de quelques modèles empiriques.

Le modèle qui est le plus en adéquation avec les résultats expérimentaux est le modèle de GAB (Figure IV-20), modèle que l'on retiendra par ailleurs.

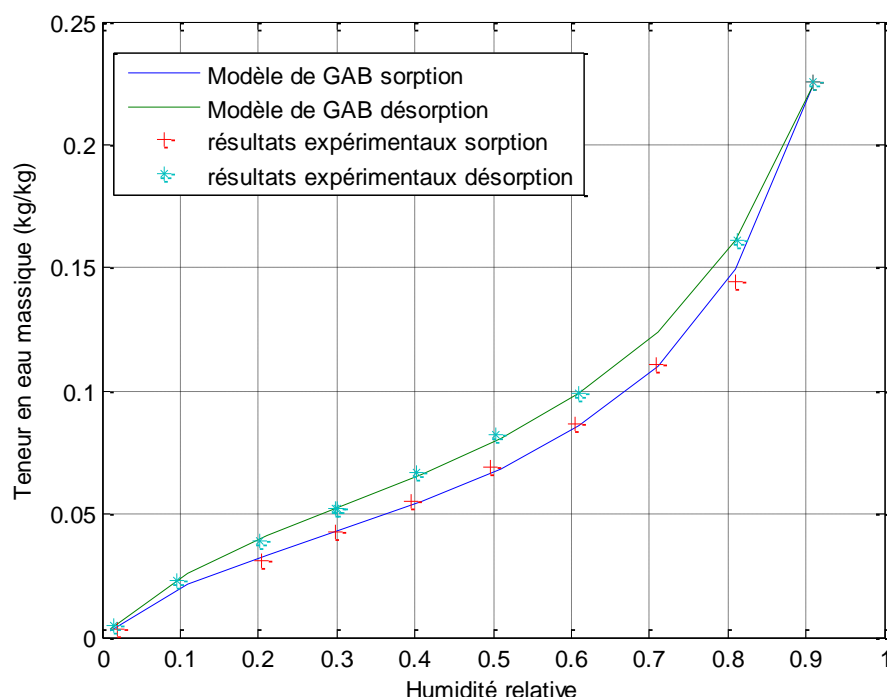


Figure IV-20 : Modèle de GAB et mesures expérimentales.

❖ Calcul de la surface spécifique

La surface spécifique peut s'évaluer à partir de l'équation (IV.22) en prenant comme valeur pour la teneur en eau w_m celle calculée par l'approximation du modèle de BET (modèle valable pour une adsorption monocouche). On obtient ainsi une surface spécifique S_m de $79,97 \text{ m}^2 \cdot \text{g}^{-1}$ à comparer à la valeur de $26,6 \text{ m}^2 \cdot \text{g}^{-1}$, déduite de la mesure de porosité et de la masse volumique intrinsèque et du diamètre des fibres moyen trouvé sur nos images (équations (I.7) et (I.9)). La grande différence entre ces deux méthodes de calculs peut être dû au fait que la formule intégrant le diamètre des fibres considère que les fibres sont mono-dispersées et possèdent le même diamètre. Or c'est pas du tout le cas de notre matériau, puisque nous avons montré dans la section II.4.2 que le diamètre de fibres varie de 32 à plus de 700 μm (chênevotte). Cette formule n'est donc pas adaptée pour nos laines, mais elle peut donner un ordre de grandeur.

IV.6.2 Perméabilité à la vapeur ou diffusivité à la vapeur

Sous l'influence de gradients de différents potentiels (pression totale, pression de vapeur, température, etc.), l'eau présente dans un milieu poreux est susceptible de se déplacer sous ses phases vapeur et liquide. Dans le cas des laines, on s'est intéressé au transfert d'humidité qui s'effectue généralement par diffusion de vapeur (diffusion moléculaire).

Si on néglige l'effet de la thermo-diffusion le transfert de vapeur à l'échelle macroscopique est généralement bien décrit par la loi de Fick :

$$\dot{m} = \frac{k}{e} (P_{vi} - P_{ve}) \quad (IV.29)$$

avec k le coefficient de perméabilité à la vapeur en $[\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{Pa}^{-1}]$; e , l'épaisseur du matériau en $[\text{m}]$; p_{vi} et p_{ve} , respectivement les pressions partielles de vapeur intérieure et extérieure en Pa et \dot{m} , le débit de vapeur saturante en $[\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}]$.

La perméabilité à la vapeur k représente la quantité de vapeur qui traverse en une unité de temps, une épaisseur de 1 mètre de matériau, pour une différence de pression partielle de 1 Pascal.

On notera que l'équation de transfert obtenu par changement d'échelle (III.409) se réduit à une loi de type Fick dans le cas où le transfert est isotherme et où il n'y a pas d'advection (pas de gradient de pression totale).

IV.6.2.1 Perméabilité à la vapeur

IV.6.2.1.1 Méthode

La détermination de la perméabilité à la vapeur se fait en imposant un gradient de pression de vapeur constant monodimensionnel à un échantillon d'épaisseur e . En régime permanent, la densité du flux de vapeur traversant l'échantillon s'écrit :

$$g_h = \frac{k \Delta P_v}{e} \quad (IV.30)$$

avec g_h , la densité du flux de vapeur traversant l'échantillon $[\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}]$; k , la perméabilité « vapeur » $[\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{Pa}^{-1}]$; P_v , la pression de vapeur $[\text{Pa}]$ et e , l'épaisseur de l'échantillon $[\text{m}]$.

En imposant une différence de pression de vapeur de part et d'autre de l'échantillon d'épaisseur e et en mesurant la prise de masse de cet échantillon, on peut en déduire la perméabilité à la vapeur (Figure IV-21).

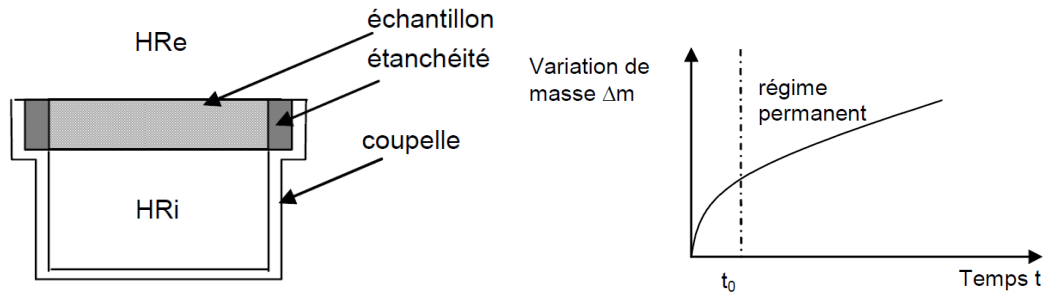


Figure IV-21 : Méthode de la coupelle et exemple du résultat (Collet, 2004).

IV.6.2.1.1 Protocole expérimental

Un échantillon de laine de chanvre de 10 cm de diamètre et de 10 cm d'épaisseur est placé sur une coupelle dans laquelle se trouve solution saline (ou desséchante) mise afin

de maintenir une humidité relative HR_i de 71 % (Figure IV-22ab). L'ensemble (échantillon + coupelle) est placé dans une chambre d'essais (Figure IV-22c) dont la température et l'humidité HR_e de 95 % sont contrôlées. Dans notre cas, les enceintes sont contrôlées par des solutions saturées.



Figure IV-22 : Représentation des échantillons de laine de chanvre, a) la coupelle, b) la grille de maintien, c) les enceintes de conditionnement.

De la vapeur d'eau pénètre alors dans l'éprouvette du fait de la différence de pression partielle de vapeur régnant dans la coupelle d'essais et la chambre. On procède à des pesées périodiques de l'assemblage afin de déterminer le taux de transmission de vapeur d'eau à l'équilibre.

En régime permanent, le flux de vapeur d'eau à travers l'éprouvette G [kg.s^{-1}] est représenté par la pente de la droite de régression entre la masse de l'assemblage d'essai et le temps, excluant la phase initiale non linéaire de l'essai.

$$G = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (\text{IV.31})$$

Ainsi, la densité de flux (ou débit de transmission) de la vapeur g [$\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$] est obtenue par l'équation suivante :

$$g_h = \frac{G}{A} \quad (\text{IV.32})$$

où A (m^2) représente la surface exposée de l'éprouvette ce qui vaut la moyenne arithmétique des aires libres supérieure et inférieure (AFNOR, 2001).

La perméabilité à la vapeur d'eau k se calcul par l'équation suivante :

$$k = \frac{G}{A \Delta P_v} e \quad (\text{IV.33})$$

Or la présence d'une couche d'air entre l'échantillon et le sel dans la coupelle crée une certaine résistance au flux de vapeur d'eau. Cette résistance est normalement négligée, mais pour un matériau très perméable comme notre cas (laine de chanvre), on doit alors la prendre en compte. Finalement la perméabilité sera exprimée par l'expression suivante :

$$k = \frac{1}{\frac{A\Delta P_v}{G} - \frac{e_a}{k_a}} e \quad (IV.34)$$

avec e_a , l'épaisseur de la couche d'air (m) et k_a , la perméabilité à la vapeur de l'air ($k_a = 2 \cdot 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$).

IV.6.2.2 Coefficient de diffusivité hydrique isotherme

Dans le cas de diffusion isotherme, l'équation de conservation de la masse s'écrit sous la forme suivante :

$$g_h = -\rho_l D_u \nabla u \quad (IV.35)$$

Or dans notre cas, le liquide est de l'eau, on aura donc :

$$g_h = -\rho_w D_u \nabla u \quad (IV.36)$$

Si on utilise la relation liant la teneur en eau volumique u à la teneur en eau massique w

$$u = \frac{\rho_s^a}{\rho_w} w \quad (IV.37)$$

On aura alors :

$$g_h = -\rho_s^a D_u \nabla w \quad (IV.38)$$

Pour un transfert monodimensionnel :

$$g_h = -\rho_s^a D_u \frac{\partial w}{\partial x} \quad (IV.39)$$

La relation entre la teneur en eau et l'humidité relative ambiante définie par les isothermes de sorption est continue et dérivable sur l'ensemble du domaine hygroscopique.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial HR} \frac{\partial HR}{\partial x} \quad (IV.40)$$

En introduisant l'équation (IV.40) dans (IV.39) on trouve :

$$g_h = -\rho_s^a D_u \frac{\partial w}{\partial HR} \frac{\partial HR}{\partial x} \quad (IV.41)$$

Le gradient de pression de vapeur macroscopique étant linéaire dans le matériau et les conditions isothermes, le gradient d'humidité relative est donc également linéaire. On obtient alors :

$$g_h = -\rho_s^a D_u \frac{\partial w}{\partial HR} \frac{HR_2 - HR_1}{e} \quad (IV.42)$$

D'autre part, le flux d'humidité s'écrit en fonction de la perméabilité sous la forme suivante :

$$g_h = -k\Delta P_v = -k \frac{P_{v2} - P_{v1}}{e} \quad (IV.43)$$

En combinant les deux équations (IV.42) et (IV.43), on trouve :

$$-\rho_s^a D_u \frac{\partial w}{\partial HR} \frac{HR_2 - HR_1}{e} = -k \frac{P_{v2} - P_{v1}}{e} \quad (IV.44)$$

avec $HR = P_v/P_{vs}$, soit :

$$D_u = \frac{kP_{vs}}{\rho_s^a} \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial HR}} \quad (IV.45)$$

où D_u est le coefficient de diffusion hydrique dans le milieu poreux [$m^2.s^{-1}$]; k , la perméabilité à la vapeur saturante [$kg.m^{-1}.s^{-1}.Pa^{-1}$]; P_{vs} , la pression de vapeur saturante [Pa]; ρ_s^a , la masse volumique apparente sèche du matériau [$kg.m^{-3}$] et $\frac{\partial w}{\partial HR}$ la dérivée de l'isotherme de sorption.

IV.6.2.3 Prédiction de la diffusivité à partir d'images tomographiques

Comme pour la conductivité thermique, la démarche de changement d'échelle nous a permis de donner l'expression du tenseur de diffusivité à la vapeur en fonction des variables de fermeture.

L'équation macroscopique de conservation de la masse (III.407) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (\epsilon_g + \{\epsilon_{gc}\}^c) \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} + \{\dot{m}_{cond}\} + \nabla \cdot (\{\rho_v\}\{\mathbf{v}_g\}) \\ = \nabla \cdot \left[\mathcal{D}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\} + \mathcal{D}_T^{eff} \cdot \nabla \{T\} - D_v \epsilon_g \frac{\{\rho_v\}}{\{\rho_g\}^g} \cdot \nabla \{\rho_g\}^g \right] \end{aligned} \quad (IV.46)$$

Or dans cette partie de calcul, on néglige le mouvement de l'air, car il n'y a pas de différence de pression totale, on suppose de plus qu'il n'y a ni condensation ni absorption et on néglige le couplage avec la température, car on est à température constante. On considère donc qu'on a une diffusion moléculaire simple dans un milieu poreux saturé. Par suite, l'évolution de la masse volumique peut être alors décrite par le problème classique de Fick :

$$\epsilon_g \frac{\partial \{\rho_v\}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathcal{D}_v^{eff} \cdot \nabla \{\rho_v\}) \quad (IV.47)$$

avec \mathcal{D}_v^{eff} le coefficient de diffusion effectif :

$$\mathcal{D}_v^{eff} = \epsilon_g D_v \{\mathbf{I} + \nabla \mathbf{r}_{gv}\}^g \quad (IV.48)$$

où D_v est la diffusion locale supposée être constante et dans notre cas c'est la diffusivité de la vapeur dans l'air ambiant de valeur de $2,56 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.

Le problème de fermeture associé se simplifie et prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r}_{gv} &= 0 \quad \text{dans } V_g \\ \mathbf{n}_{gi} \cdot \nabla(\mathbf{r}_{gv}) &= -\mathbf{n}_{gi} \text{ sur } S_{gi} \\ \mathbf{r}_{gv}(\mathbf{x}_i) &= \mathbf{r}_{gv}(\mathbf{x}_i + \mathbf{l}_i), i = x, y, z\end{aligned}\tag{IV.49}$$

La diffusivité à la vapeur effective a été calculée sur nos 12 sous-volumes obtenus par tomographie X. Les problèmes de fermeture sont résolus par un code volumes finis (Lux, 2009).

IV.6.2.4 Résultats

L'évolution de la masse au cours du temps est présentée dans la Figure IV-23.

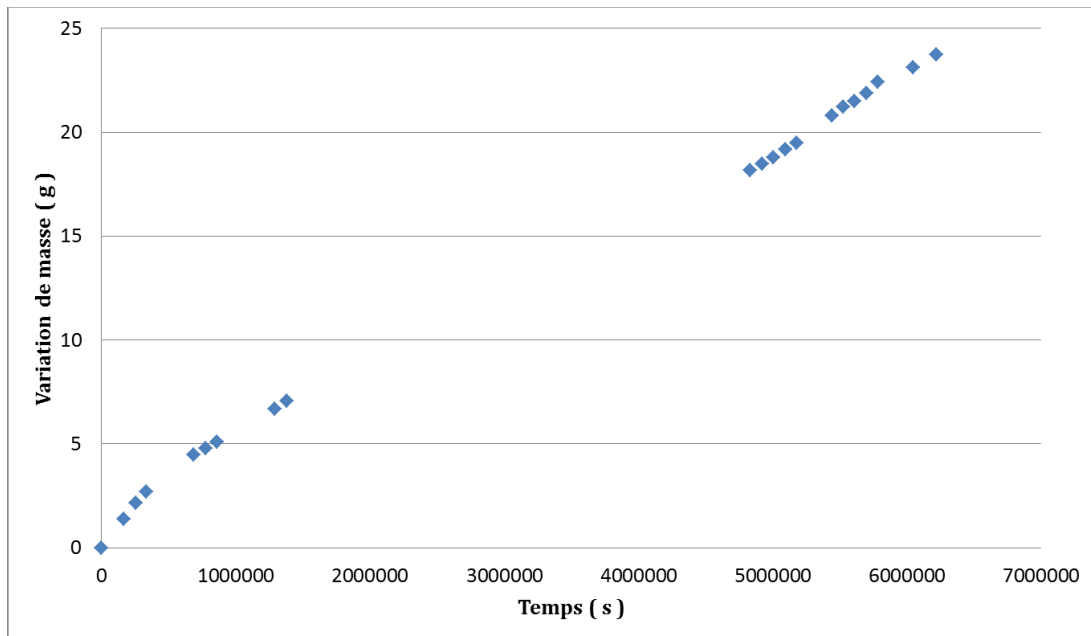


Figure IV-23 : Variation de la masse en fonction du temps.

En appliquant l'équation (IV.34), nous mène à trouver une perméabilité à la vapeur :

$$k = 1,19 \cdot 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}\tag{IV.50}$$

En utilisant l'équation (IV.45) on calcule le coefficient de diffusion hydrique isotherme, qui varie en fonction de l'humidité relative et par suite la teneur en eau du matériau. Pour cela, on a recours aux résultats de sorption et pour calculer la dérivée de l'isotherme de sorption on dérive celle du modèle de GAB. La Figure IV-24 représente l'évolution du coefficient hydrique en fonction de la teneur en eau. La précision est discutable vu qu'on a qu'une seule valeur de perméabilité à la vapeur, mais cela permet d'avoir un ordre de grandeur et même de voir l'allure proposée par De Vries.

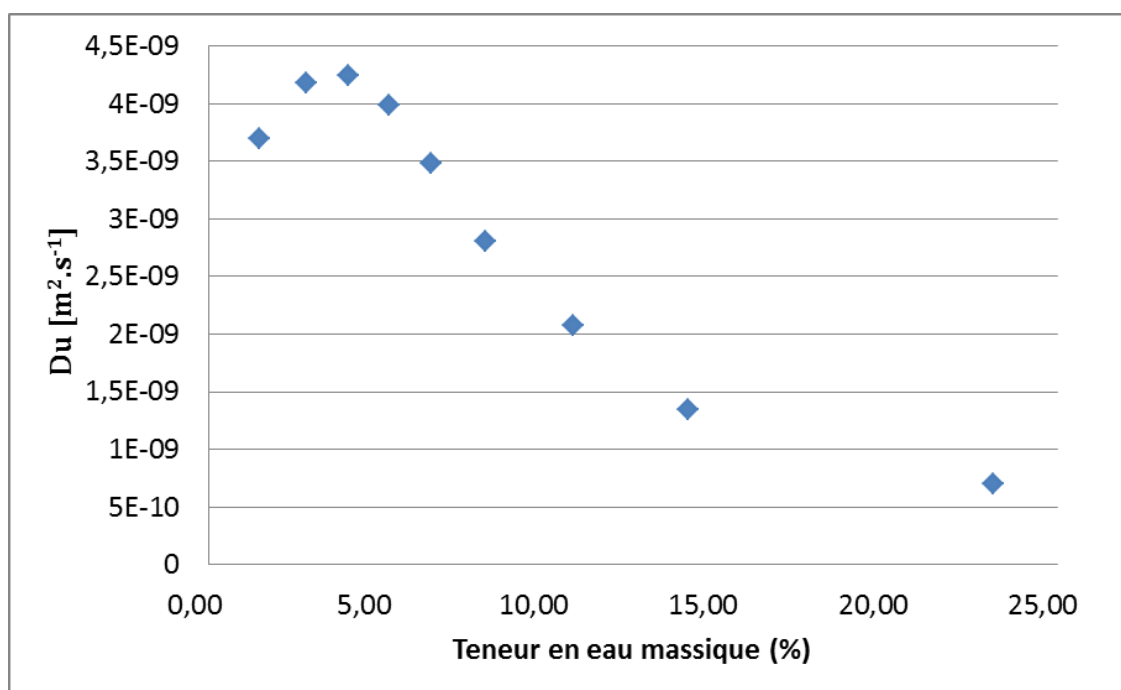


Figure IV-24 : Coefficient de diffusion isotherme de la laine de chanvre en fonction de la teneur en eau massique.

Les résultats du calcul du coefficient de diffusion à la vapeur par résolution des problèmes de fermeture sur la microstructure réelle sont présentés dans le Tableau IV-6 pour les 12 sous-volumes étudiés.

Volume	$D_x (m^2 \cdot s^{-1})$	$D_y (m^2 \cdot s^{-1})$	$D_z (m^2 \cdot s^{-1})$
1	$2,09 \cdot 10^{-6}$	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$1,86 \cdot 10^{-6}$
2	$2,17 \cdot 10^{-6}$	$2,12 \cdot 10^{-6}$	$2,02 \cdot 10^{-6}$
3	$2,26 \cdot 10^{-6}$	$2,19 \cdot 10^{-6}$	$2,23 \cdot 10^{-6}$
4	$2,26 \cdot 10^{-6}$	$2,20 \cdot 10^{-6}$	$2,17 \cdot 10^{-6}$
5	$2,20 \cdot 10^{-6}$	$2,15 \cdot 10^{-6}$	$2,07 \cdot 10^{-6}$
6	$2,12 \cdot 10^{-6}$	$2,10 \cdot 10^{-6}$	$1,91 \cdot 10^{-6}$
7	$2,15 \cdot 10^{-6}$	$2,17 \cdot 10^{-6}$	$2,03 \cdot 10^{-6}$
8	$2,09 \cdot 10^{-6}$	$2,04 \cdot 10^{-6}$	$1,87 \cdot 10^{-6}$
9	$2,04 \cdot 10^{-6}$	$1,95 \cdot 10^{-6}$	$1,65 \cdot 10^{-6}$
10	$1,94 \cdot 10^{-6}$	$1,94 \cdot 10^{-6}$	$1,71 \cdot 10^{-6}$
11	$2,13 \cdot 10^{-6}$	$2,09 \cdot 10^{-6}$	$1,99 \cdot 10^{-6}$
12	$2,05 \cdot 10^{-6}$	$1,99 \cdot 10^{-6}$	$1,89 \cdot 10^{-6}$
Moyenne	$2,124 \cdot 10^{-6}$	$2,08 \cdot 10^{-6}$	$1,95 \cdot 10^{-6}$
Écart type	$9,41 \cdot 10^{-8}$	$9,31 \cdot 10^{-8}$	$1,70 \cdot 10^{-7}$
Erreur absolue	$5,43 \cdot 10^{-8}$	$5,38 \cdot 10^{-8}$	$9,83 \cdot 10^{-8}$

Tableau IV-6 : Coefficients de diffusion de vapeur calculés suivant les trois directions x , y et z , pour les 12 volumes.

Afin de comparer ces résultats avec les mesures expérimentales, on calcule la perméabilité à la vapeur grâce à la relation :

$$g_{v,d} = -D_{v,d} \frac{M_v}{RT} \nabla P_v = -k_{v,diff} \nabla P_v \quad (IV.51)$$

Et donc :

$$k_{v,diff} = D_{v,d} \frac{M_v}{RT} \quad (IV.52)$$

avec $k_{v,diff}$, la perméabilité à la vapeur par diffusion [$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$] et D_v , le coefficient de diffusion de la vapeur [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$].

En utilisant cette équation et les coefficients de diffusion de vapeur calculés sur les images, on obtient alors un tenseur de perméabilité à la vapeur :

$$k_{v,diff} = \begin{bmatrix} 1,56 \pm 0,040 & & \\ & 1,52 \pm 0,039 & \\ & & 1,42 \pm 0,072 \end{bmatrix} \cdot 10^{-11} \quad (\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{Pa}^{-1})$$

On constate que la perméabilité calculée sur nos images est environ 10 fois plus faible que celle mesurée expérimentalement. Cette différence peut être due à plusieurs facteurs tant au niveau de l'expérience réalisée que des calculs numériques.

Tout d'abord, la détermination expérimentale de la perméabilité peut être faussée par la difficulté de bien étanchéifier l'échantillon qui est très poreux. Des microfuites, même très légères, peuvent en effet entraîner une surestimation de la perméabilité à la vapeur, qui est très élevée dans ce type de milieu très peu dense.

D'un autre côté, les calculs numériques ont été réalisés sur des images de résolution 16 μm qui ne permettent pas de résoudre suffisamment précisément les fibres les plus fines. On a déjà mentionné le fait que le filtrage réalisé sur les images a pour effet de légèrement surestimer le diamètre des petites fibres. En surestimant la fraction solide de la laine, on sous-estime le coefficient de diffusion à la vapeur calculé.

Les résultats de mesures issus de la littérature sont du même ordre de grandeur que les résultats présentés ici, pour des laines de densité similaires. Collet (2004) mesure une perméabilité à la vapeur de $10^{-11} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$ pour des mesures à la coupelle à des humidités fixées à 0-50 % et 0-85 % et à une température de 23°C tandis que Achchaq (Achchaq, 2008) trouve des perméabilités de l'ordre de $10^{-10} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$ pour des humidités < 40% et des perméabilités de l'ordre de 10^{-11} pour des humidités relatives > 70 %.

L'avantage de l'approche numérique réside dans le fait que l'on mesure directement le tenseur de diffusivité, ce qui permet de mettre en évidence l'anisotropie du tenseur macroscopique. D'autre part, cette approche permet également de remplacer avantageusement des mesures qui peuvent être très longues et très délicates à réaliser sur ce type de matériau très poreux.

IV.7 PREDICTION DE LA PERMEABILITE INTRINSEQUE

Comme on l'a vu dans le chapitre III.9.2, la perméabilité intrinsèque est un paramètre fondamental pour déterminer l'importance du transport de masse par advection par rapport au transport par diffusion. La mesure de la perméabilité intrinsèque sur ce type de matériau est très délicate, du fait de la très forte porosité. Même pour de faibles gradients de pression, le régime d'écoulement ne correspond plus à un régime de Stokes et il devient délicat d'identifier la perméabilité. Dans (Delisée et al., 2010b), un dispositif de mesures spécifique a été développé pour des isolant à base de fibres de bois et les résultats ont été comparés à des calculs numériques directs sur des images tomographiques. Un très bon accord entre ces deux méthodes a été trouvé. Dans cette partie, nous nous proposons donc d'utiliser le code de calcul de la perméabilité développé conjointement par P. Turcry, F. Gendron et J. Lux au LaSIE, afin de calculer la perméabilité intrinsèque sur nos images tomographiques. Ces résultats seront comparés à des modèles analytiques de la littérature.

IV.7.1 Calcul sur les milieux réels

Le code de calcul de la perméabilité est basé sur la simulation d'un écoulement de Stokes stationnaire. La simulation numérique permet d'obtenir le champ de pression et le champ de vitesse microscopique. Le schéma numérique est de type SIMPLE dans un maillage décentré (Delisée et al., 2010a).

La perméabilité, notée k , est une caractéristique intrinsèque du milieu ne dépendant que de paramètres géométriques. Elle est définie par la loi de Darcy pour de faibles nombres de Reynolds :

$$\vec{u}_D = -\frac{k}{\mu} \times \vec{\nabla} P \quad (IV.53)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide ; P , la pression et \vec{u}_D la vitesse de Darcy.

En considérant un flux perpendiculaire aux faces, en utilisant la loi de Darcy, on obtient la perméabilité :

$$k = u_D \cdot \frac{e}{\Delta P} \cdot \mu = \frac{Q}{S} \cdot \frac{e}{\Delta P} \cdot \mu \quad (IV.54)$$

avec S et e , la section et la longueur de l'échantillon et Q est le débit du fluide au travers de l'échantillon. La simulation numérique nous permet de calculer Q à partir du champ de vitesse en supposant le fluide incompressible et donc de déterminer la perméabilité.

Les simulations numériques réalisées ont pour but de reproduire le mode opératoire expérimental. Pour cela, une différence de pression constante ΔP est imposée entre les deux faces de l'échantillon. Des conditions d'imperméabilité sont imposées sur les autres faces. Modèles empiriques

Un des paramètres clés contrôlant la perméabilité des matériaux fibreux est la porosité ϵ . Dans la littérature on trouve plusieurs travaux pour estimer la perméabilité en fonction de la porosité.

Le premier modèle empirique établi pour des milieux poreux est le modèle de Kozeny et Carman (Bear, 1988), dont l'expression est dans le cas d'un réseau fibreux :

$$\frac{k}{a^2} = \frac{\epsilon^3}{36(1 - \epsilon)^2 k} \quad (IV.55)$$

où k est la constante de Kozeny qui vaut 5,5.

Gebart (Gebart, 1992) présente une étude théorique, numérique et expérimentale de la perméabilité des réseaux de fibres ordonnés. Le traitement analytique du flux perpendiculaire à l'axe des fibres est basé sur des hypothèses que la perméabilité est contrôlée par les fentes étroites formées entre les fibres et que la largeur de ces fentes ne varie que lentement. La perméabilité a la forme suivante :

$$\frac{k}{a^2} = C \left(\sqrt{\frac{1 - \epsilon_c}{1 - \epsilon}} - 1 \right)^{\frac{5}{2}} \quad (IV.56)$$

avec a le rayon des fibres ; ϵ_c , la valeur critique de la porosité en dessous de laquelle il n'y a pas de flux imprégnant (le seuil de percolation) et C , un facteur géométrique (pour un réseau de fibres carré $C = 16/9 \sqrt{2}\pi$ et $\epsilon_c = 1 - \pi/4$ et pour un réseau de fibres hexagonal $C = 16/9 \sqrt{6}\pi$ et $\epsilon_c = 1 - \pi/2\sqrt{3}$)

Koponen et al., (1998) ont utilisé des simulations de type de Lattice Boltzman (LBM) sur un milieu à trois dimensions avec des fibres aléatoires, analogue au papier ou à d'autres matériaux non tissés. Les résultats montrent que la perméabilité de ces matériaux est indépendante du fait que les fibres ont été placées de manière aléatoire ou non. Les auteurs déduisent une relation empirique pour la perméabilité en fonction de la porosité, pour des porosités comprises entre 0,4 et 0,95 :

$$\frac{k}{a^2} = \frac{5,55}{e^{10,1(1-\epsilon)} - 1} \quad (IV.57)$$

Clague et al., (2000) ont également étudié la perméabilité des milieux fibreux ordonnés et désordonnés en trois dimensions grâce à des simulations de type Lattice Boltzman. Dans ce travail, le libre chevauchement des fibres a été autorisé. Ils ont développé une relation entre la perméabilité et la porosité pour les milieux fibreux ordonnés ou désordonnés. Pour le cas d'un milieu désordonné, la relation proposée est :

$$\frac{k}{a^2} = b_1 \left(\sqrt{\frac{1 - \epsilon_c}{1 - \epsilon}} - 1 \right)^2 e^{b_2(1-\epsilon)} \quad (IV.58)$$

où b_1 et b_2 sont les paramètres de calage qui valent respectivement pour un milieu désordonné 0,71407 et -0,51854. Pour un arrangement désordonné de fibres (aléatoires), une valeur typique $\epsilon_c = 1 - \pi/4 \approx 0,21$ a été calculée. Ce travail montre un excellent accord avec les résultats numériques pour des porosités entre 0,33 et 0,95.

Nabovati et al. (2009) ont quant à eux étudié l'effet de l'hétérogénéité de la porosité sur les propriétés hydrodynamiques (perméabilité, tortuosité). Ils ont trouvé qu'une version

modifiée du modèle de Gebart fournit un excellent ajustement aux données à travers toute la gamme de porosité. Ils ont adapté la relation originelle de Gebart en :

$$\frac{k}{a^2} = C_1 \left(\sqrt{\frac{1 - \epsilon_c}{1 - \epsilon}} - 1 \right)^{C_2} \quad (\text{IV.59})$$

C_1 et C_2 sont des constantes liés à la géométrie du réseau qui vaut 0,491 et 2,31. La porosité critique ϵ_c est fixée à 0,0743.

IV.7.2 Résultats

Les perméabilités calculées grâce aux modèles décrits ci-dessus sont présentées dans le Tableau IV-7. Nous avons fixé une porosité de 90,5 % qui correspond à la porosité mesurée par analyse d'image ainsi qu'un rayon de fibre moyen de 50 μm , mesuré par granulométrie.

Modèles	Perméabilité (m^2)
Kozeny Carman	$1,04 \cdot 10^{-9}$
Koponen	$8,61 \cdot 10^{-9}$
Clague	$6,03 \cdot 10^{-9}$
Nabovati	$6,98 \cdot 10^{-9}$

Tableau IV-7 : Perméabilités calculées par des modèles empiriques.

Les résultats numériques obtenus sur l'ensemble de nos images sont présentés dans le Tableau IV-8.

Volume	$k_x (m^2)$	$k_y (m^2)$	$k_z (m^2)$
1	$7,04 \cdot 10^{-9}$	$5,66 \cdot 10^{-9}$	$5,48 \cdot 10^{-9}$
2	$5,80 \cdot 10^{-9}$	$5,10 \cdot 10^{-9}$	$4,71 \cdot 10^{-9}$
3	$1,31 \cdot 10^{-8}$	$8,40 \cdot 10^{-9}$	$1,25 \cdot 10^{-8}$
4	$1,13 \cdot 10^{-8}$	$8,46 \cdot 10^{-9}$	$8,12 \cdot 10^{-9}$
5	$8,74 \cdot 10^{-9}$	$6,48 \cdot 10^{-9}$	$7,77 \cdot 10^{-9}$
6	$6,39 \cdot 10^{-9}$	$6,71 \cdot 10^{-9}$	$5,41 \cdot 10^{-9}$
7	$5,92 \cdot 10^{-9}$	$5,07 \cdot 10^{-9}$	$5,47 \cdot 10^{-9}$
8	$6,35 \cdot 10^{-9}$	$5,37 \cdot 10^{-9}$	$3,61 \cdot 10^{-9}$
9	$5,56 \cdot 10^{-9}$	$4,77 \cdot 10^{-9}$	$3,89 \cdot 10^{-9}$
10	$3,11 \cdot 10^{-9}$	$3,11 \cdot 10^{-9}$	$2,38 \cdot 10^{-9}$
11	$5,75 \cdot 10^{-9}$	$4,66 \cdot 10^{-9}$	$3,91 \cdot 10^{-9}$
12	$5,16 \cdot 10^{-9}$	$2,63 \cdot 10^{-9}$	$3,77 \cdot 10^{-9}$
Moyenne	$7,02 \cdot 10^{-9}$	$5,54 \cdot 10^{-9}$	$5,58 \cdot 10^{-9}$
Écart type	$2,77 \cdot 10^{-9}$	$1,79 \cdot 10^{-9}$	$2,75 \cdot 10^{-9}$
Erreur absolue	$1,60 \cdot 10^{-9}$	$1,03 \cdot 10^{-9}$	$1,59 \cdot 10^{-9}$

Tableau IV-8 : Calcul de la perméabilité sur les 12 volumes, suivant trois directions x , y et z .

Donc en moyenne on trouve :

- Suivant x : $(7,02 \pm 1,6) \cdot 10^{-9} (m^2)$
- Suivant y : $(5,54 \pm 1,03) \cdot 10^{-9} (m^2)$
- Suivant z : $(5,58 \pm 1,6) \cdot 10^{-9} (m^2)$

On note ici un très bon accord entre les résultats obtenus par les modèles adaptés aux milieux fibreux et les résultats issus de simulation numérique directe. Le modèle de Carman-Kozeny, beaucoup moins adapté est celui qui présente le plus grand écart avec nos résultats numériques.

On remarque d'autre part que les autres modèles ont tendance à surestimer la perméabilité, ce qui peut être lié au choix difficile d'un diamètre de fibre moyen. Il serait peut-être plus judicieux de définir un diamètre « efficace », plutôt que moyen ici.

Comme pour l'ensemble des autres résultats déjà obtenus, l'approche numérique se révèle encore une fois intéressante pour mettre en avant l'anisotropie des coefficients de transferts effectifs du matelas fibreux. On remarque ici logiquement que la perméabilité selon l'axe x (selon lequel les fibres sont orientées de façon préférentielle) est la plus importante. On trouve cependant une perméabilité similaire selon l'axe y et z, alors qu'on s'attendrait à une valeur plus faible selon z. Il est ici possible que l'on observe un effet lié à la taille trop faible des volumes de calculs, ou à leur nombre trop restreint. On sait en effet que les volumes représentatifs pour des phénomènes d'écoulement doivent être bien plus grands que pour les phénomènes diffusifs (Ahmadi and Quintard, 1996). On pourra remarquer par ailleurs que l'incertitude de mesure est relativement importante ($\pm 1,6$ selon x et z et $\pm 1,03$ selon y).

IV.8 CONCLUSION

Dans ce chapitre, les caractéristiques structurales ainsi que les propriétés de transfert ont été déterminées à l'aide de différentes méthodes (expérimentales, numériques et par des modèles existants).

Les essais ATG ont confirmé les résultats de la bibliographie concernant la composition des fibres végétales. Les fibres de chanvre présentes dans l'isolant sont principalement composées de cellulose et leur teneur en lignine est faible.

Nous avons montré que le calcul numérique de la conductivité thermique par résolution des problèmes de fermeture sur les images tomographiques permet de compléter les mesures obtenues expérimentalement d'une part et d'élargir les données disponibles sur ce type de matériau. Outre le bon accord obtenu, l'approche numérique à l'avantage de mettre en avant l'anisotropie du tenseur de conductivité thermique effective, qui est délicat de mesurer expérimentalement sur ce type de matériau très poreux. La conductivité a également été déterminée par des modèles analytiques dont les données d'entrée ont été mesurées par analyse d'image sur la structure réelle. Les résultats confirment que les modèles de conductivité analytique 1D testés ne peuvent pas être utilisés pour prédire la conductivité thermique de ce type de milieux fibreux anisotropes. Seuls les modèles tenant compte de la distribution d'orientation des fibres peuvent être utilisés dans ce cas, mais ils ne peuvent fournir qu'une estimation de la conductivité et sont limités par leur géométrie simple.

La caractérisation hydrique de nos matériaux s'est basée en partie sur les mesures des isothermes de sorption/désorption. Nous avons pu confirmer que ces matériaux isolants sont macroporeux, car les isothermes se rapprochent du type II définies avec une hystérésis en désorption. Les résultats obtenus par le calage des modèles de GAB et Oswin sont en bon accord avec les mesures expérimentales.

Concernant les propriétés de transfert de vapeur de notre matériau, nous avons constaté que les résultats numériques et expérimentaux diffèrent d'un ordre de grandeur. Nous avons évoqué des pistes très probables expliquant ces différences, tant du point de vue numérique qu'expérimentales. Les résultats de la littérature, pour des laines de densité similaires, montrent également une certaine dispersion (liée aux difficultés expérimentales), mais restent dans le même intervalle que nos résultats (entre 10^{-11} et $10^{-10} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$)

Enfin, nous avons montré que les résultats des calculs des perméabilités intrinsèques et à la vapeur sur les milieux réels (sur les images tomographiques) sont très similaires avec ce qu'on trouve dans la littérature d'une et par le calcul des modèles empiriques existants d'autre part.

Au travers de ces résultats, nous montrons que l'approche numérique est une alternative pertinente à la fois aux mesures expérimentales et à l'utilisation de modèles analytiques qui peinent parfois (cf. conductivité thermique) à rendre compte de l'anisotropie et/ou de la complexité de la structure tridimensionnelle de ce type de matériaux. Le calcul numérique peut également être utilisé comme un outil d'optimisation de processus de fabrication en utilisant un générateur réaliste de structure 3D.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Pour prendre en compte les nouveaux critères de qualité des bâtiments, l'utilisation des matériaux à faibles impacts environnementaux devient indispensable. La laine de chanvre, un matériau utilisé pour l'isolation des bâtiments, est composée essentiellement de fibres végétales, ce qui en fait un matériau de choix dans une optique de développement durable.

Dans un premier temps, après une étude bibliographique sur le chanvre et les milieux poreux, ainsi que les modèles existants dans la littérature, une caractérisation qualitative et quantitative de la laine est présentée.

En utilisant les images MEB, nous avons mis en évidence la structure interne de la fibre de chanvre, qui est elle-même composée de plusieurs cellules élémentaires, ainsi que les dimensions caractéristiques des lumens, de l'ordre de micromètre.

Le réseau fibreux a quant à lui été caractérisé quantitativement par l'analyse des images 3D obtenues par tomographie X. Les mesures de distribution de taille de pores ont mis en évidence une distribution normale qui est caractéristique des matériaux non tissés à très faible densité. Les populations de fibres (polymères et chanvre) ont pu être identifiées à l'aide d'un algorithme de segmentation mis au point au laboratoire. La proportion de polymère d'environ 12 % correspond effectivement aux indications du fabricant et cet accord valide donc partiellement la segmentation effectuée. Par ailleurs, l'anisotropie du matelas fibreux lié au processus de fabrication a été mise en évidence par des mesures d'auto-corrélation ainsi que par le calcul de la distribution de l'orientation locale des fibres. Nous avons par ailleurs montré que la taille de l'image n'était pas suffisante pour définir un VER, ce qui peut être dû à la présence d'hétérogénéités de grande taille comme les chènevottes. Les calculs d'autocorrélations ont cependant montré que l'image contient suffisamment de longueurs de corrélation pour que les hypothèses de la prise de moyenne soient validées et il est ainsi possible d'estimer par la suite les propriétés macroscopiques avec des erreurs relativement faibles.

Dans un second temps, un modèle de transferts couplés de chaleur et de masse avec prise en compte de la sorption et du changement de phase a été développé. L'originalité de notre modèle est de considérer trois échelles caractéristiques : l'échelle de la fibre en tant que matériau hétérogène, l'échelle du réseau de fibres homogénéisées et enfin l'échelle du matériau. Ce double changement d'échelle a permis de séparer le comportement des fibres du comportement de l'ensemble.

Le premier changement d'échelle a permis d'obtenir les expressions des tenseurs effectifs dans les fibres et ainsi d'estimer leurs ordres de grandeur en fonction de la teneur en eau et de la microgéométrie de la fibre.

Le modèle macroscopique développé par le second changement d'échelle tient compte des variations des propriétés effectives au sein des fibres à travers les variations possibles de la conductivité thermique et de la diffusivité des fibres liées à leur orientation, à leur teneur en eau et à leur microstructure. En complément, la détermination des expressions des taux de sorption et de changement de phases en fonction des variables macroscopiques présente elle aussi un des aspects originaux de notre modèle.

Notons que l'ensemble des deux problèmes de fermeture couplés pour chaque changement d'échelle a été développé, ce qui permet effectivement de calculer les coefficients effectifs apparaissant dans les modèles homogénéisés.

Dans un troisième temps, nous avons procédé à la caractérisation des propriétés de transfert thermique et hydrique de notre matériau aux travers d'essais expérimentaux, de calculs numériques et de l'application de modèles analytiques issus de la littérature.

La conductivité thermique des matériaux est mesurée par une méthode instationnaire basée sur la technique de la source plane transitoire modifiée. La valeur mesurée est de l'ordre de $0,040 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$, ce qui est une valeur usuelle des laines isolantes. En effectuant un calcul sur les images tomographiques, on a pu identifier l'anisotropie thermique de notre laine qui n'a pas été possible de détecter avec notre dispositif expérimental. Enfin, nous avons comparé ces résultats avec des modèles de conductivité issus de la littérature. Nos résultats montrent clairement que les modèles unidimensionnels ne peuvent pas être utilisés pour prédire la conductivité thermique du support fibreux anisotrope. Seuls des modèles prenant en compte la distribution d'orientation des fibres, qui était fournie par le calcul sur nos images 3D, semblent à même d'approcher les valeurs de conductivité obtenues par calcul sur la microstructure réelle. Mais ces modèles restent limités par leur géométrie simple et ne peuvent que donner une estimation de la conductivité.

La perméabilité à la vapeur mesurée a été comparée à celle obtenue par un calcul effectué sur des images tomographiques. Bien que présentant un écart d'un ordre de grandeur, ces résultats sont tout de même très satisfaisants ; ils correspondent en effet aux valeurs de la littérature pour le même type de laine.

Enfin, la perméabilité intrinsèque a été calculée sur les images tomographiques et comparée avec celle obtenues à partir de modèles empiriques. Un très bon accord est constaté entre les différentes approches.

Ainsi, en s'appuyant sur les paramètres étudiés ici, nous pouvons conclure que :

- Les images tomographiques segmentées constituent un support très intéressant pour les simulations numériques et le calcul des propriétés effectives directement sur la structure réelle.
- L'approche numérique peut être utilisée comme un outil d'optimisation du process de fabrication en utilisant un générateur réaliste de structure 3D.

Enfin, pour une connaissance plus approfondie et complète de ces matériaux, il serait bon de réaliser plus d'essais en établissant des isothermes de sorption à d'autres températures, en complétant les essais de perméabilité à la vapeur avec d'autres couples d'humidités relatives et en mesurant les caractéristiques thermiques avec d'autres dispositifs expérimentaux permettant la distinction de l'anisotropie de thermique de ce type de matériau.

Au niveau numérique, l'étape suivante va consister à résoudre numériquement les problèmes de fermeture couplés sur des géométries simples de fibres et sur le réseau de fibres. Il sera possible alors de mettre en place un code de simulation du modèle macroscopique complet.

Enfin, on pourra envisager d'intégrer dans notre modèle le transport d'eau liquide et le gonflement des fibres végétales.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Achchaq, F., 2008. Étude hygro-thermique de matériaux isolants fibreux. Amiens.
- Affdl, J.C.H., Kardos, J.L., 1976. The Halpin-Tsai equations: A review. *Polym. Eng. Sci.* 16, 344–352. doi:10.1002/pen.760160512
- Ahmadi, A., Quintard, M., 1996. Large-scale properties for two-phase flow in random porous media. *J. Hydrol.* 183, 69–99. doi:10.1016/S0022-1694(96)80035-7
- Altendorf, H., Jeulin, D., 2011. 3d directional mathematical morphology for analysis of fiber orientations. *Image Anal. Stereol.* 28, 143–153. doi:10.5566/ias.v28.p143-153
- Arnaud, L., Cerezo, V., 2002. Mechanical, Thermal, and Acoustical Properties of Concrete Containing Vegetable Particles. *ACI Spec. Publ.* 209.
- Baley, C., 1990. *Fibres naturelles de renfort pour matériaux composites*. Ed. Techniques Ingénieur.
- Bear, J., 1988. *Dynamics of fluids in porous media*. Dover, New York.
- Bernard, D., Nielsen, Ø., Salvo, L., Cloetens, P., 2005. Permeability assessment by 3D interdendritic flow simulations on microtomography mappings of Al–Cu alloys. *Mater. Sci. Eng. A* 392, 112–120. doi:10.1016/j.msea.2004.09.004
- Bledzki, A.K., Gassan, J., 1999. Composites reinforced with cellulose based fibres. *Prog. Polym. Sci.* 24, 221–274. doi:10.1016/S0079-6700(98)00018-5
- Bouddour, A., Auriault, J.-L., Mhamdi-Alaoui, M., Bloch, J.-F., 1998. Heat and mass transfer in wet porous media in presence of evaporation—condensation. *Int. J. Heat Mass Transf.* 41, 2263–2277. doi:10.1016/S0017-9310(98)00002-7
- Bouloc, P., 2006. *Le chanvre industriel: production et utilisations*. France Agricole Editions.
- Bourmaud, A., Baley, C., 2012. Nanoindentation contribution to mechanical characterization of vegetal fibers. *Compos. Part B Eng., Natural Materials in Composites Engineering* 43, 2861–2866. doi:10.1016/j.compositesb.2012.04.050
- Boutin, M.P., Flamin, C., Quinton, S., Gosse, G., 2006. Etude des caractéristiques environnementales du chanvre par l'analyse de son cycle de vie.
- Bresenham, J.E., 1985. Run Length Slice Algorithm for Incremental Lines, in: Earnshaw, R.A. (Ed.), *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*, NATO ASI Series. Springer Berlin Heidelberg, pp. 59–104.
- Brisset, F., 2008. *Microscopie électronique à balayage et microanalyses*. EDP Sciences.
- Brunauer, S., Emmett, P.H., Teller, E., 1938. Adsorption of gases in multimolecular layers. *J. Am. Chem. Soc.* 60, 309–319.
- Buschle-Diller, G., Fanter, C., Loth, F., 1999. Structural Changes in Hemp Fibers as a Result of Enzymatic Hydrolysis with Mixed Enzyme Systems. *Text. Res. J.* 69, 244–251. doi:10.1177/004051759906900403

- Cáceres, G., Bruneau, D., Jomaa, W., 2007. Two-Phase Shrinking Porous Media Drying: A Modeling Approach Including Liquid Pressure Gradients Effects. *Dry. Technol.* 25, 1927–1934. doi:10.1080/07373930701727226
- Carson, J.K., Lovatt, S.J., Tanner, D.J., Cleland, A.C., 2003. An analysis of the influence of material structure on the effective thermal conductivity of theoretical porous materials using finite element simulations. *Int. J. Refrig.* 26, 873–880. doi:10.1016/S0140-7007(03)00094-X
- Ceaglske, N.H., Hougen, O.A., 1937. Drying Granular Solids. *Ind. Eng. Chem.* 29, 805–813. doi:10.1021/ie50331a017
- Célino, A., Fréour, S., Jacquemin, F., Casari, P., 2013. Characterization and modeling of the moisture diffusion behavior of natural fibers. *J. Appl. Polym. Sci.* 130, 297–306.
- Chamoin, J., 2013. Optimisation des propriétés (physiques, mécaniques et hydriques) de bétons de chanvre par la maîtrise de la formulation. INSA de Rennes.
- Chandesris, M., Jamet, D., 2009. Jump Conditions and Surface-Excess Quantities at a Fluid/Porous Interface: A Multi-scale Approach. *Transp. Porous Media* 78, 419–438. doi:10.1007/s11242-008-9302-0
- Chirife, J., Iglesias, H.A., 1978. Equations for fitting water sorption isotherms of foods: Part 1 — a review. *Int. J. Food Sci. Technol.* 13, 159–174. doi:10.1111/j.1365-2621.1978.tb00792.x
- Chung, D.S., Pfoest, H., 1967. . *Trans ASAE*.
- Clague, D.S., Kandhai, B.D., Zhang, R., Slood, P.M.A., 2000. Hydraulic permeability of (un)bounded fibrous media using the lattice Boltzmann method. *Phys. Rev. E* 61, 616–625. doi:10.1103/PhysRevE.61.616
- Collet, F., 2004. Caractérisation Hydrique Et Thermique De Matériaux De Génie Civil à Faibles Impacts Environnementaux. Institut National des Sciences Appliquées de Rennes.
- Collet, F., Bart, M., Serres, L., Miriel, J., 2008. Porous structure and water vapour sorption of hemp-based materials. *Constr. Build. Mater.* 22, 1271–1280. doi:10.1016/j.conbuildmat.2007.01.018
- Davit, Y., Quintard, M., Debenest, G., 2010. Equivalence between volume averaging and moments matching techniques for mass transport models in porous media. *Int. J. Heat Mass Transf.* 53, 4985–4993. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.05.032
- Delisée, C., Lux, J., Malvestio, J., 2010a. 3D Morphology and Permeability of Highly Porous Cellulosic Fibrous Material. *Transp. Porous Media* 83, 623–636. doi:10.1007/s11242-009-9464-4
- Delisée, C., Lux, J., Malvestio, J., 2010b. 3D Morphology and Permeability of Highly Porous Cellulosic Fibrous Material. *Transp. Porous Media* 83, 623–636. doi:10.1007/s11242-009-9464-4
- De Vries, D.A., 1958. Simultaneous transfert of heat and moisture in porous media. *Trans. Am. Geophys. Union* pp 909–916.
- Di Landro, L., Janszen, G., 2014. Composites with hemp reinforcement and bio-based

- epoxy matrix. *Compos. Part B Eng.* 67, 220–226. doi:10.1016/j.compositesb.2014.07.021
- Dirrenberger, J., 2012. Propriétés effectives de matériaux architecturés. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Dirrenberger, J., Forest, S., Jeulin, D., 2014. Towards gigantic RVE sizes for 3D stochastic fibrous networks. *Int. J. Solids Struct.* 51, 359–376. doi:10.1016/j.ijsolstr.2013.10.011
- Dujardin, N., 2014. Un Matériau Biosourcé De Choix: Les Fibres Naturelles. Caractérisation Et Applications., in: 25èmes Journées Scientifiques de l'Environnement-L'économie Verte En Question.
- Duval, A., Bourmaud, A., Augier, L., Baley, C., 2011. Influence of the sampling area of the stem on the mechanical properties of hemp fibers. *Mater. Lett.* 65, 797–800. doi:10.1016/j.matlet.2010.11.053
- Edwards, M., Rogers, C., 1994. A flux continuous scheme for the full tensor pressure equation, in: al, C. et (Ed.), *Proc of 4th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*.
- Eichhorn, S.J., Young, R.J., 2004. Composite micromechanics of hemp fibres and epoxy resin microdroplets. *Compos. Sci. Technol.* 64, 767–772. doi:10.1016/j.compscitech.2003.08.002
- Engelund, E.T., Thygesen, L.G., Svensson, S., Hill, C.A.S., 2012. A critical discussion of the physics of wood–water interactions. *Wood Sci. Technol.* 47, 141–161. doi:10.1007/s00226-012-0514-7
- Fan, M., 2010. Characterization and performance of elementary hemp fibres: Factors Influencing tensile strength. *BioResources* 5, 2307–2322.
- Filali, M., 2006. Conductivité thermique apparente des milieux granulaires soumis à des contraintes mécaniques: modélisation et mesures.
- Gebart, B.R., 1992. Permeability of Unidirectional Reinforcements for RTM. *J. Compos. Mater.* 26, 1100–1133. doi:10.1177/002199839202600802
- Gray, W.G., 1975. A derivation of the equations for multi-phase transport. *Chem. Eng. Sci.* 30, 229–233. doi:10.1016/0009-2509(75)80010-8
- Harkins, W.D., Jura, G., 1944. Surfaces of solids. X. Extension of the attractive energy of a solid into an adjacent liquid or film, the decrease of energy with distance, and the thickness of films. *J. Am. Chem. Soc.* p.1362–1366.
- Henderson, S.M., 1952. A basic concept of equilibrium moisture p.29–32.
- Henry, P.S.H., 1939. Diffusion in absorbing media, in: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, pp. 215–241.
- Hill, C.A.S., Keating, B.A., Jalaludin, Z., Mahrtdt, E., 2012. A rheological description of the water vapour sorption kinetics behaviour of wood invoking a model using a canonical assembly of Kelvin-Voigt elements and a possible link with sorption hysteresis. *Holzforschung* 66, 35–47.
- Hon, D.N.-S., 1994. Cellulose: a random walk along its historical path. *Cellulose* 1, 1–25.

doi:10.1007/BF00818796

- Hong, T.D., Ellis, R.H., Gunn, J., Moore, D., 2002. Relative humidity, temperature, and the equilibrium moisture content of conidia of *Beauveria bassiana* (Balsamo) Vuillemin: a quantitative approach. *J. Stored Prod. Res.* 38, 33–41. doi:10.1016/S0022-474X(00)00043-6
- Howes, F., Whitaker, S., 1985. The spatial averaging theorem revisited. *Chem. Eng. Sci.* 40, 1387–1392.
- Ilczyszyn, F., 2013. Caractérisation expérimentale et numérique du comportement mécanique des agro-composites renforcés par des fibres de chanvre. *Troyes*.
- John, M.J., Thomas, S., 2008. Biofibres and biocomposites. *Carbohydr. Polym.* 71, 343–364. doi:10.1016/j.carbpol.2007.05.040
- Joly, N., 2003. Synthèse et caractérisation de nouveaux films plastiques obtenus par acylation et réticulation de la cellulose. *Limoges*.
- Koponen, A., Kandhai, D., Hellén, E., Alava, M., Hoekstra, A., Kataja, M., Niskanen, K., Sloom, P., Timonen, J., 1998. Permeability of Three-Dimensional Random Fiber Webs. *Phys. Rev. Lett.* 80.
- Krischer, O., Kroll, K., 1956. *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik*. Springer Verlag Berlin.
- Kumlutaş, D., Tavman, İ.H., Turhan Çoban, M., 2003. Thermal conductivity of particle filled polyethylene composite materials. *Compos. Sci. Technol.* 63, 113–117. doi:10.1016/S0266-3538(02)00194-X
- Langmuir, I., 1918. The Adsorption Of Gases On Plane Surfaces Of Glass, Mica And Platinum. *J. Am. Chem. Soc.* 40, 1361–1403. doi:10.1021/ja02242a004
- Les filières industrielles stratégiques de l'économie verte, 2010.
- Lewis, W.K., 1921. The Rate of Drying of Solid Materials. *J. Ind. Eng. Chem.* 13, 427–432. doi:10.1021/ie50137a021
- Luévano-Rivas, O.A., Valdés-Parada, F.J., 2015. Upscaling immiscible two-phase dispersed flow in homogeneous porous media: A mechanical equilibrium approach. *Chem. Eng. Sci.* 126, 116–131. doi:10.1016/j.ces.2014.12.004
- Luikov, A.V., 1975. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies (review). *Int. J. Heat Mass Transf.* 18, 1–14. doi:10.1016/0017-9310(75)90002-2
- Lux, J., 2013. AUTOMATIC SEGMENTATION AND STRUCTURAL CHARACTERIZATION OF LOW DENSITY FIBREBOARDS. *Image Anal. Stereol.* 32, 13–25. doi:10.5566/ias.v32.p13-25
- Lux, J., 2009. A Non-periodic Closure Scheme for the Determination of Effective Diffusivity in Real Porous Media. *Transp. Porous Media* 82, 299–315. doi:10.1007/s11242-009-9423-0
- Lux, J., 2005. Comportement thermique macroscopique de milieux fibreux réels anisotropes: étude basée sur l'analyse d'images tridimensionnelles. *Université Sciences et Technologies-Bordeaux I*.
- Lux, J., Ahmadi, A., Gobbe, C., Delisée, C., 2006. Macroscopic thermal properties of real

- fibrous materials: Volume averaging method and 3D image analysis. *Int. J. Heat Mass Transf.* 49, 1958–1973. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.09.038
- Lux, J., Delisée, C., Thibault, X., 2011. 3d Characterization Of Wood Based Fibrous Materials: An Application. *Image Anal. Stereol.* 25, 25–35. doi:10.5566/ias.v25.p25-35
- Magniont, C., Escadeillas, G., Oms-Multon, C., Coutand, M., 2011. Valorisation de granulats végétaux pour la formulation d'écomatériaux de construction.
- Mainguy, M., Coussy, O., Eymard, R., 1999. Modélisation des transferts hydriques isothermes en milieu poreux : Application au séchage des matériaux à base de ciment. Laboratoire central des ponts et chaussées, Paris.
- Matheron, G., 1967. Elements pour une théorie des milieux poreux.
- Mellon, R.M., Sharma, H.S.S., 2002. Thermogravimetric analysis of perennial ryegrass: relationship between dry matter digestibility and thermal profiles. *Thermochim. Acta* 383, 161–168. doi:10.1016/S0040-6031(01)00681-5
- Merouani, L., 1987. Phénomènes de sorption et de transfert d'humidité dans des matériaux du bâtiment : étude expérimentale comparative d'un mortier de ciment et d'un enduit de façade. Grenoble I.N.P.G.
- Meyer, F., Beucher, S., 1990. Morphological segmentation. *J. Vis. Commun. Image Represent.* 1, 21–46. doi:10.1016/1047-3203(90)90014-M
- Mitra, G.B., Mukherjee, P.S., 1980. X-ray diffraction study of fibrous polymers. I. Degree of paracrystallinity—a new parameter for characterizing fibrous polymers. *Polymer* 21, 1403–1409. doi:10.1016/0032-3861(80)90140-8
- Moyne, C., 1987. Transferts couples chaleur-masse lors du séchage : prise en compte du mouvement de la phase gazeuse. Vandoeuvre-les-Nancy, INPL.
- Nabovati, A., Llewellyn, E.W., Sousa, A.C.M., 2009. A general model for the permeability of fibrous porous media based on fluid flow simulations using the lattice Boltzmann method. *Compos. Part Appl. Sci. Manuf.* 40, 860–869. doi:10.1016/j.compositesa.2009.04.009
- Nadeau, J.-P., Puiggali, J.-R., 1995. Séchage des procédés physique aux procédés industriels, Technique et documentation-LAVOISIER. ed.
- Nozad, I., Carbonell, R.G., Whitaker, S., 1985. Heat conduction in multiphase systems—I: Theory and experiment for two-phase systems. *Chem. Eng. Sci.* 40, 843–855. doi:10.1016/0009-2509(85)85037-5
- Ochoa-Tapia, J.A., Whitaker, S., 1997. Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. *Int. J. Heat Mass Tansfer* 40, 2691–2707.
- Oswin, C., 1946. . *J. Soc. Chem. Ind.* p.419–421.
- Ouajai, S., Shanks, R.A., 2005. Composition, structure and thermal degradation of hemp cellulose after chemical treatments. *Polym. Degrad. Stab.* 89, 327–335. doi:10.1016/j.polymdegradstab.2005.01.016
- Pal, R., 2008. On the Lewis-Nielsen model for thermal/electrical conductivity of composites. *Compos. Part Appl. Sci. Manuf.* 39, 718–726. doi:10.1016/j.compositesa.2008.02.008

- Perona, P., Malik, J., 1990. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 12, 629–639. doi:10.1109/34.56205
- Perré, P., Turner, I.W., 2002. A heterogeneous wood drying computational model that accounts for material property variation across growth rings. *Chem. Eng. J., Drying 2000: Selected Papers from the 12th International Symposium IDS2000* 86, 117–131. doi:10.1016/S1385-8947(01)00270-4
- Placet, V., 2009. Characterization of the thermo-mechanical behaviour of Hemp fibres intended for the manufacturing of high performance composites. *Compos. Part Appl. Sci. Manuf., Special Issue: 15th French National Conference on Composites - JNC15 40*, 1111–1118. doi:10.1016/j.compositesa.2009.04.031
- Placet, V., Méteau, J., Froehly, L., Salut, R., Boubakar, M.L., 2014. Investigation of the internal structure of hemp fibres using optical coherence tomography and Focused Ion Beam transverse cutting. *J. Mater. Sci.* 49, 8317–8327. doi:10.1007/s10853-014-8540-5
- Placet, V., Trivaudey, F., Cisse, O., Gucheret-Retel, V., Boubakar, M.L., 2012. Diameter dependence of the apparent tensile modulus of hemp fibres: A morphological, structural or ultrastructural effect? *Compos. Part Appl. Sci. Manuf.* 43, 275–287. doi:10.1016/j.compositesa.2011.10.019
- Quintard, M., Whitaker, S., 1994a. Transport in ordered and disordered porous media iv: computer generated porous media for three-dimensional systems. *Transp. Porous Media* 15, 51–70.
- Quintard, M., Whitaker, S., 1994b. Transport in ordered and disordered porous media v: geometrical results for two-dimensional systems. *Transp. Porous Media* 15, 183–196.
- Quintard, M., Whitaker, S., 1993. One- and two-equation models for transient diffusion processes in two-phase systems. *Adv. Heat Transf.* 23, 369–464.
- Quintard, M., Whitaker, S., 1993. One- and Two-Equation Models for Transient Diffusion Processes in Two-Phase Systems, in: James P. Hartnett and Thomas F. Irvine (Ed.), *Advances in Heat Transfer*. Elsevier, pp. 369–464.
- Ragoubi, M., 2010. Contribution à l'amélioration de la compatibilité interfaciale fibres naturelles/matrice thermoplastique via un traitement sous décharge couronne. Nancy 1.
- Rolland du Roscoat, S., Decain, M., Thibault, X., Geindreau, C., Bloch, J.-F., 2007. Estimation of microstructural properties from synchrotron X-ray microtomography and determination of the REV in paper materials. *Acta Mater.* 55, 2841–2850. doi:10.1016/j.actamat.2006.11.050
- Rollins, R., Spangler, M.G., Kirkham, D., 1954. Movement of soil moisture under a thermal gradient. *Proc Highw. Res Board* 492–508.
- Rouquerol, F., Luciani, L., Llewellyn, P., Denoyel, R., Rouquerol, J., 2003. Texture des matériaux pulvérulents ou poreux. *Tech. Ing.*
- Sedan, D., 2007. Etude des interactions physico-chimiques aux interfaces fibres de chanvre/ciment: influence sur les propriétés mécaniques du composite. Limoges.

- Serra, J., 1982. Image analysis and mathematical morphology. Academic Press, London, Royaume-Uni.
- Siau, J., 1984. Transport processes in wood. Springer Berlin Heidelberg.
- Siau, J.F., 1984. Transport Processes in Wood, Springer Series in Wood Science. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Sing, K.S.W., 1985. Reporting physisorption data for gas/solid systems with special reference to the determination of surface area and porosity (Recommendations 1984). Pure Appl. Chem. 57, 603–619.
- Smith, A., Chotard, T., Pagnoux, C., n.d. Etude des interactions physico-chimiques aux interfaces fibres de chanvre/ciment. Influence sur les propriétés mécaniques du composite.
- Stephen Whitaker, 1998. Coupled Transport in Multiphase Systems: A theory of Drying. Adv. Heat Transf. 31, 1–103.
- Thygesen, A., 2001. Properties of hemp fibre polymer composites-An optimisation.
- Umurigirwa, B.S., 2014. Élaboration et caractérisation d'un agromatériau chanvre-amidon pour le Bâtiment. Reims.
- Vachier, C., 2001. Morphological scale-space analysis and feature extraction, in: 2001 International Conference on Image Processing, 2001. Proceedings. Presented at the 2001 International Conference on Image Processing, 2001. Proceedings, pp. 676–679 vol.3. doi:10.1109/ICIP.2001.958209
- Valdes-Parada, F.J., Ochoa-Tapia, J.A., Alvarez-Ramirez, J., 2009. Validity of the permeability Carman–Kozeny equation: A volume averaging approach. Phys. Stat. Mech. Its Appl. 388, 789–798. doi:10.1016/j.physa.2008.11.024
- Vignon, M.R., Dupeyre, D., Garcia-Jaldon, C., 1996. Morphological characterization of steam-exploded hemp fibers and their utilization in polypropylene-based composites. Bioresour. Technol., IEA Network-Biotechnology for the Conversion of Lignocellulosics 58, 203–215. doi:10.1016/S0960-8524(96)00100-9
- Vignon, M.R., Garcia-Jaldon, C., Dupeyre, D., 1995. Steam explosion of woody hemp chènevotte. Int. J. Biol. Macromol. 17, 395–404. doi:10.1016/0141-8130(96)81852-6
- Wang, M., Pan, N., 2008. Predictions of effective physical properties of complex multiphase materials. Mater. Sci. Eng. R Rep. 63, 1–30. doi:10.1016/j.mser.2008.07.001
- Weidmann, D., 2010. Aide-mémoire Textiles techniques. Dunod.
- Whitaker, S., 1999. The method of volume averaging, Theory and Applications of Transport in Porous Media. Springer.
- Whitaker, S., 1998. Coupled Transport in Multiphase Systems: A Theory of Drying, in: James P. Hartnett, T.F.I. Young I. Cho and George A. Greene (Ed.), Advances in Heat Transfer. Elsevier, pp. 1–104.
- Whitaker, S., 1989. Heat transfer in catalytic packed bed reactors. Handb. Heat Mass Transf. 3, 361–417.
- Whitaker, S., 1986. Local thermal equilibrium: An application to packed bed catalytic

- reactor design. Chem. Eng. Sci. 41, 2029–2039. doi:10.1016/0009-2509(86)87119-6
- Wirth, E., Guitteny, F., Mathonat, C., 2014. Thermogravimétrie | Techniques de l'Ingénieur.
- Wood, B.D., 2013. Technical note: Revisiting the geometric theorems for volume averaging. Adv. Water Resour. 62, 340–352. doi:10.1016/j.advwatres.2013.08.012
- Wood, B.D., Valdés-Parada, F.J., 2013. Volume averaging: Local and nonlocal closures using a Green's function approach. Adv. Water Resour. 51, 139–167. doi:10.1016/j.advwatres.2012.06.008
- Wyllie, M.R.J., Southwick, P.F., 1954. An Experimental Investigation of the S.P. and Resistivity Phenomena in Dirty Sands. J. Pet. Technol. 6, 44–57. doi:10.2118/302-G
- Yao, F., Wu, Q., Lei, Y., Guo, W., Xu, Y., 2008. Thermal decomposition kinetics of natural fibers: Activation energy with dynamic thermogravimetric analysis. Polym. Degrad. Stab. 93, 90–98. doi:10.1016/j.polymdegradstab.2007.10.012
- Zakoune, A., Glouannec, P., Salagnac, P., 2013. Identification of the Liquid and Vapour Transport Parameters of an Ecological Building Material in Its Early Stages. Transp. Porous Media 98, 589–613. doi:10.1007/s11242-013-0162-x